Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 octobre 2020

Exercice 1

1. Cette inéquation n'a de sens que si $x \geqslant -\frac{3}{2}$, et elle ne peut par ailleurs pas être vérifiée si $x < 1$ (puisque, dans ce cas, le membre de droite de l'inéquation est négatif alors que celui de gauche, s'il est défini, est positif). Contentons-nous donc d'étudier le cas $x \geqslant 1$, où on peut tout élever au carré pour obtenir une inéquation équivalente puisque tout est positif : $2x+3 \leqslant x^2-2x+1$, donc $x^2-4x-2 \geqslant 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16+8 = 24$ et pour racines $x_1 = \frac{4-\sqrt{24}}{2} = 2-\sqrt{6}$ et $x_2 = \frac{4+\sqrt{24}}{2} = 2+\sqrt{6}$. Comme $2-\sqrt{6} < 1$, on garde alors $\mathcal{S} = [2+\sqrt{6}, +\infty[$.
2. On va effectuer simplement le changement de variable brutal $X = \cos^2(2x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2-3X+1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$ et pour racines $X_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{3+1}{4} = 1$ (qui était racine évidente si on voulait esquiver le calcul du discriminant). On doit donc avoir $\cos^2(2x) = 1$ ou $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}$, ce qui donne pas moins de quatre cas à étudier : si $\cos(2x) = 1$, alors $2x \equiv 0[2\pi]$, donc $x \equiv 0[\pi]$; si $\cos(2x) = -1$, alors $2x \equiv \pi[2\pi]$ donc $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On peut regrouper ces deux premiers cas sous la forme $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Ensuite, on peut aussi avoir $\cos(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $2x \equiv \pm\frac{\pi}{4}[2\pi]$, soit $x \equiv \pm\frac{\pi}{8}[\pi]$; ou encore $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $2x \equiv \pm\frac{3\pi}{4}[2\pi]$, soit $x \equiv \pm\frac{3\pi}{8}[\pi]$. On peut en fait regouper tous ces cas sous la forme $x \equiv \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{4}\right]$ (en conservant en plus le $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$ trouvé auparavant).
3. On commence bien entendu par mettre sous forme exponentielle (l'équation est définie pour tout réel x) : $e^{x^3\ln(2)} = e^{x^2\ln(3)}$, donc $x^3\ln(2) - x^2\ln(3) = 0$, ou encore $x^2(x\ln(2)-\ln(3)) = 0$. On conclut immédiatement : $\mathcal{S} = \{0, \log_2(3)\}$.
4. Cette question légèrement vicieuse peut se résoudre de plusieurs façons. Commençons par une méthode « pas de calculs » : l'équation ne peut avoir de sens que si $x \in [-1,1]$ et $2x \in [-1,1]$, donc si x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Mais, la fonction arcsin étant strictement croissante, on a alors $\arcsin(x) \leqslant \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, et $\arcsin(2x) \leqslant \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ (valeur qui ne peut de toute façon jamais être dépassée par un arcsinus). Si on veut que la somme des deux soit égale à $\frac{2\pi}{3}$ qui est justement égal à $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$, il faut que les deux inégalités soient des égalités, ce qui induit que $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

   Deuxième méthode infiniment plus brutale : on compose à gauche et à droite par la fonction sinus (attention, ce ne sera pas une équivalence) pour obtenir $x\sqrt{1-4x^2} + 2x\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(on a utilisé en passant la formule d'addition des sinus ainsi que la relation $\cos(\arcsin(a)) = \sqrt{1-a^2}$). On passe un morceau à droite : $x\sqrt{1-4x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\sqrt{1-x^2}$, puis on élève tout au carré (nouvelle étape qui n'est pas une équivalence) pour trouver $x^2(1-4x^2) = \frac{3}{4} - 2\sqrt{3}x\sqrt{1-x^2} + 4x^2(1-x^2)$. On simplifie un peu : $2\sqrt{3}x\sqrt{1-x^2} = 3x^2 + \frac{3}{4}$, puis on élèvre une fois de plus au carré (on n'est plus à une implication près), $12x^2(1-x^2) = 9x^4 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{16}$, soit $21x^4 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{9}{16} = 0$. Il est temps de poser $X = x^2$ pour se ramener à une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = \frac{225}{4} - \frac{189}{4} = \frac{36}{4} = 9$, et les racines sont donc $X_1 = \frac{\frac{15}{2} - 3}{42} = \frac{9}{84} = \frac{3}{28}$ et $X_2 = \frac{\frac{15}{2} + 3}{42} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$. On en déduit quatre valeurs possibles pour x : $x = \pm\sqrt{\frac{3}{28}}$ et $x = \pm\frac{1}{2}$. Il est facile d'éliminer les valeurs négatives, un peu moins de se convaincre que $\sqrt{\frac{3}{28}}$ ne peut pas être solution de l'équation initiale. Bref, la première méthode était quand même pas mal...

Ajout après cure de sommeil du correcteur : en fait, on peut s'en sortir beaucoup plus simplement par le calcul en passant simplement un arcsin à gauche au départ : on écrit alors $\sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \arcsin(2x)\right)$, soit $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{2} \times 2x$, qui donne tout bêtement $\sqrt{1-4x^2} = 0$, donc $x^2 = \frac{1}{4}$ et $x = \pm\frac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à vérifier les deux valeurs possibles et à conclure.

5. Ce sont plutôt les formules d'addition que celles de duplication qui vont servir : $\tan((a+b)+c) = \frac{\tan(a+b)+\tan(c)}{1-\tan(a+b)\tan(c)} = \frac{\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} + \tan(c)}{1 - \frac{(\tan(a)+\tan(b))\tan(c)}{1-\tan(a)\tan(b)}}$. On met au même dénominateur et on développe tout ce qui peut l'être : $\tan(a+b+c) = \frac{\tan(a)+\tan(b)+\tan(b)-\tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1-\tan(a)\tan(b)-\tan(a)\tan(c)-\tan(b)\tan(c)}$. Bien entendu, cette formule n'a un sens que si a, b, c et $a+b+c$ sont des angles n'ayant pas un cosinus nul.
En notant θ la valeur recherchée, on calcule en exploitant le résultat précédent (et en simplifiant les nombreux tan(arctan) qui vont apparaitre) $\tan(\theta) = \frac{2+3+2+\sqrt{3}-6(2+\sqrt{3})}{1-6-2(2+\sqrt{3}-3(2+\sqrt{3})} = \frac{-5-5\sqrt{3}}{-15-5\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3-3+2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Autrement dit, on trouve que $\tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Attention à ne pas en déduire abusivement que $\theta = \frac{\pi}{6}$, on peut seulement pour l'instant affirmer que $\theta \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$. Soyons plus précis : comme 2, 3 et $2+\sqrt{3}$ sont des nombres plus grands que $\sqrt{3}$, la croissance de la fonction arctan permet d'affirmer que $\arctan(2)$, $\arctan(3)$ et $\arctan(2+\sqrt{3})$ appartiennent tous les trois à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc que $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. La seule valeur possible pour θ est alors $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

Exercice 2

1. Pour que f soit définie, on doit avoir $x > 0$ et $1-x > 0$, d'où $\mathcal{D}_f =]0,1[$. On a de façon évidente $\lim_{x\to 0}(1-x)\ln(1-x) = 0$, et par croissance comparée $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. De même, $\lim_{x\to 1} x\ln(x) = 0$ (pas de forme indéterminée) et $\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = 0$ par croissance

comparée (mais oui, en posant $X = 1 - x$, on se ramène tout simplement à $\lim\limits_{X \to 0} X \ln(X)$), donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

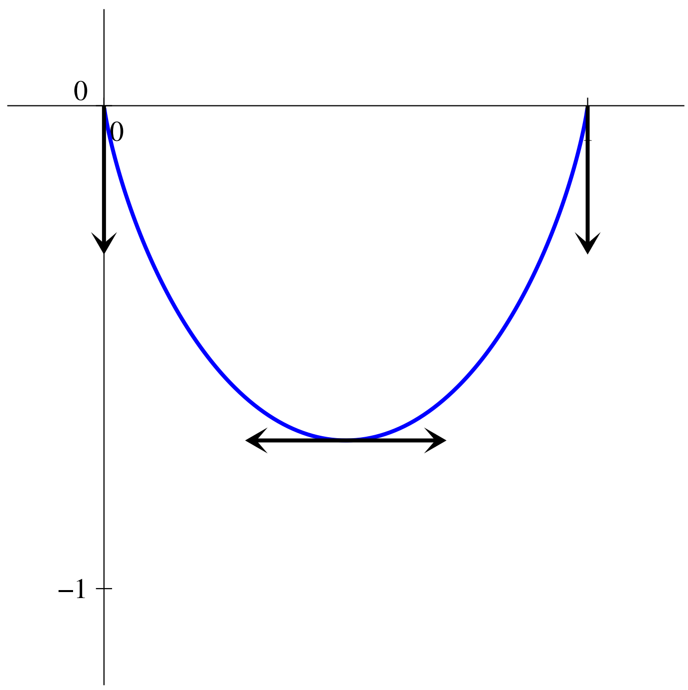
2. Il s'agit de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ (une symétrie par rapport à cette droite transforme en effet x en $1 - x$).

3. Contentons-nous simplement de calculer la dérivée : $f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - \dfrac{1-x}{1-x} = \ln(x) - \ln(1-x)$ (on peut regrouper sous la forme d'un seul ln de quotient, mais ça n'a aucun intérêt). Par croissance de la fonction ln, cette dérivée est positive si $x \geqslant 1 - x$, donc si $x \geqslant \dfrac{1}{2}$. La fonction f admettra en particulier un minimum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f	0	$\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	0

4. Aucune forme indéterminée, on obtient directement $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f'(x) = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ va donc devenir « de plus en plus verticale » aux bords de l'intervalle $]0, 1[$ (en fait, en effectuant deux prolongements pas continuité en 0 et en 1, on prouverait qu'il y a des deux côtés des tangentes verticales à la courbe).

5. Pas grand chose de très passionnant à indiquer sur cette courbe :



6. Il suffit d'écrire cette expression sous forme exponentielle $e^{x\ln(x)}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{f(x)}$ pour constater (la fonction exponentielle étant strictement croissante) que son minimum sur $]0, 1[$ est atteint au même endroit que celui de f, donc quand $x = \dfrac{1}{2}$, et a pour valeur $e^{-\ln(2)} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

1. Le seul problème qui peut se poser est l'annulation du dénominateur, qui se produit quand $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$, donc si $\sin(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Autrement dit, tous les réels de la forme $x \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ sont valeurs interdites (cette forme regroupe d'un seul coup tous les cas possibles). Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
   La fonction f est par ailleurs 2π-périodique (c'est évident, d'ailleurs la présence de carrés fait que f est même π-périodique, ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude de moitié par rapport à ce que je fais dans ce corrigé), mais aussi paire (c'est évident aussi avec le carré sur le sinus du dénominateur). On peut donc se contenter de l'étudier sur $I = [0, \pi]$ (privé de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{3\pi}{4}$, bien entendu), on complètera ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par périodicité.

2. Rappelons que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$, et $f(x) = \dfrac{\cos(2x) + 1}{2\cos(2x)}$.

3. Du calcul basique : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ n'existe pas puisque f n'est pas définie en $\frac{\pi}{4}$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\frac{3}{4}}{-1} = -\frac{3}{4}$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -2$.

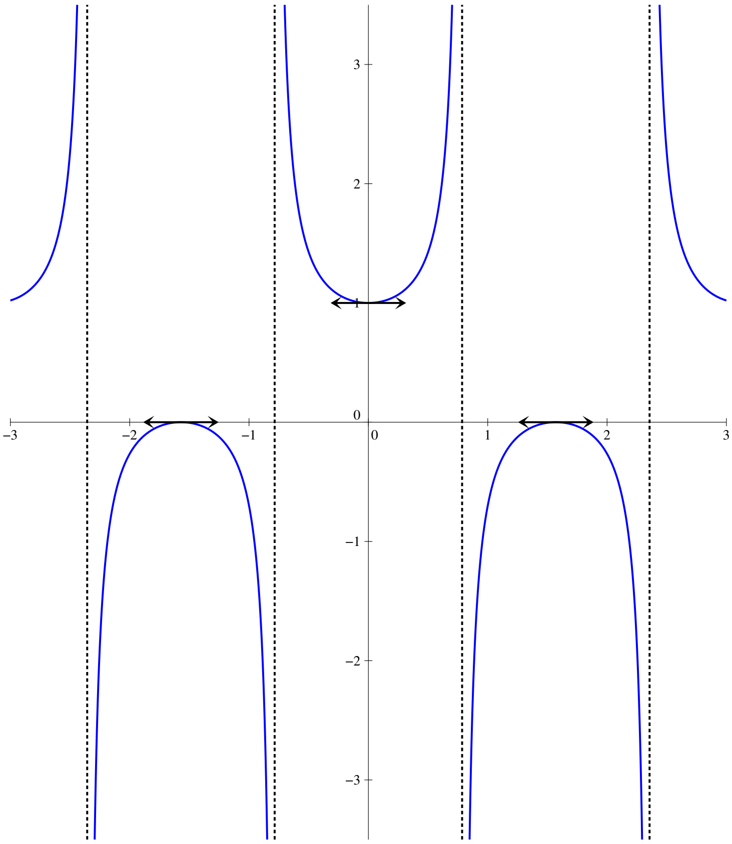
4. Il s'agit de résoudre l'équation $\cos^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$, donc $\cos^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$, ou encore $\cos^2(x) = 1$, ce qui se produit quand $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Autrement dit, les antécédents de 1 sont tous les réels vérifiant $x \equiv 0[\pi]$.

5. Calculons donc : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(x)\cos(x)(1 - 2\sin^2(x)) - 4\sin(x)\cos(x)\cos^2(x)}{(1 - 2\sin^2(x))^2}$
   $= \dfrac{2\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) - 1)}{(1 - 2\sin^2(x))^2} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{(1 - 2\sin^2(x))^2}$ en utilisant simplement la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Cette dérivée est bien du signe de $\sin(x)\cos(x)$, ce qui permet de dresser le tableau suivant sur l'intervalle I :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

   Pour compléter le tableau, on a eu besoin de calculer $f(0)$ et $f(\pi)$ (calculs immédiats), et les limites à gauche et à droite de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{3\pi}{4}$. Ces limites sont toutes infinies et dépendent uniquement du signe du dénominateur de f (le numérateur tendant vers $\frac{1}{2}$ à chaque fois). Or, $1 - 2\sin^2(x) > 0$ quand $\sin^2(x) < \frac{1}{2}$, donc quand $\sin(x) \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, ce qui , sur notre intervalle d'étude, se produit si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$.

6. Voici la courbe demandée, avec ses nombreuses asymptotes verticales :



Exercice 4

1. Le dénominateur s'annule quand $e^x = 1$, donc quand $x = 0$, ce qui implique que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. Par ailleurs, $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x-1}$ en multipliant tout par e^x, ce qui semble indiquer que f n'est ni paire ni impaire. En effet, $f(1) = \dfrac{e}{1-e}$ et $f(-1) = \dfrac{1}{e-1}$, qui n'est ni égal ni opposé à $f(1)$ (il y a un facteur $-e$ entre les deux).

2. La fonction est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)+e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$, expression positive sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Il ne reste donc qu'à calculer les limites de la fonction. Pas de forme indéterminée en $-\infty$ où on a simplement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. De l'autre côté, on peut tout diviser par e^x pour écrire $f(x) = \dfrac{1}{e^{-x}-1}$ et en déduire aisément que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. Enfin, en 0, la numérateur tend vers 1 et le signe du dénominateur est évident à obtenir : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. D'où le tableau complet :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

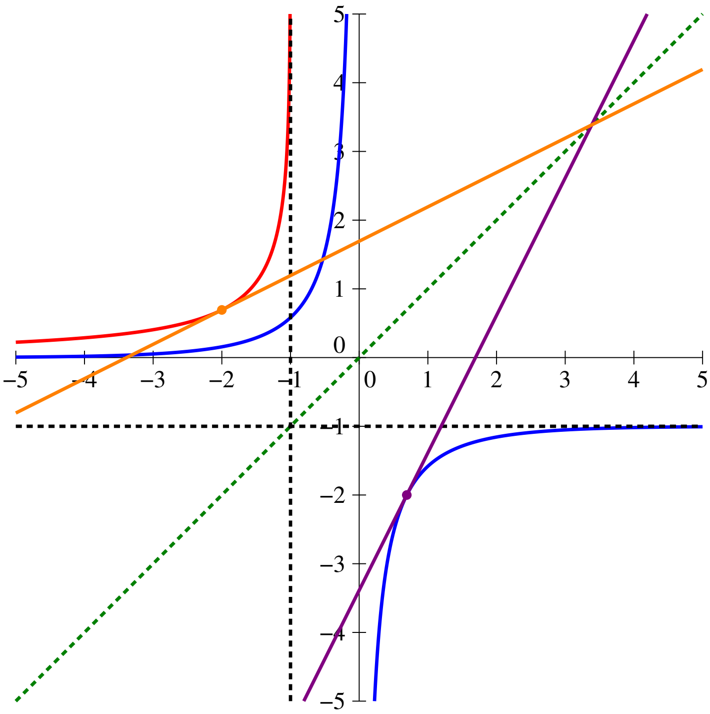
3. C'est un calcul direct : $f(x) + f(x)^2 = \dfrac{e^x}{1-e^x} + \dfrac{e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \dfrac{e^x(1-e^x)+e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2} = f'(x)$.

4. La fonction f est continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, donc bijective de cet intervalle vers l'intervalle image $I =]-\infty, -1[$ qui découle des calculs de limites effectués plus haut. Le théorème de la bijection assure que g sera aussi strictement croissante, de tableau de variation :

x	$-\infty$		-1
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

5. Calculons déjà $f(\ln(2)) = \dfrac{2}{1-2} = -2$ et $f'(2) = \dfrac{2}{(1-2)^2} = 2$. On en déduit l'équation de tangente demandée : $y = 2(x - \ln(2)) - 2 = 2x - 2\ln(2) - 2$. Comme $f(\ln(2)) = -2$, la tangente à la courbe de g en son point d'abscisse -2 est symétrique de celle qu'on vient de calculer par rapport à la droite d'équation $y = x$, et a en particulier un coefficient directeur inverse de celui de cette dernière. Autrement dit, notre deuxième tangente a une équation de la forme $y = \dfrac{1}{2}x + b$, et doit de plus passer par le point de coordonnées $(-2, \ln(2))$, donc vérifier $\ln(2) = -1 + b$, soit $b = \ln(2) + 1$. On en déduit la deuxième équation demandée : $y = \dfrac{1}{2}x + \ln(2) + 1$ (on peut aussi obtenir cette équation en calculant la réciproque de la fonction affine correspondant à la première tangente).

6. En bleu la courbe de la fonction f, en rouge celle de g, en violet la première tangente et en orange la deuxième (et en vert en pointillés la droite d'équation $y = x$ pour mieux visualiser les symétries) :



7. Appliquons donc la fameuse formule qui ne sert à rien : $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{f(g(x)) + f(g(x))^2}$ en exploitant habilement le résultat de la question 3. Or, par définition, $f(g(x)) = x$ pour toutes les valeurs de x pour lesquelles cela a un sens (ici les x appartenant à $]-\infty, -1[$), donc $g'(x) = \dfrac{1}{x + x^2}$.

8. Il s'agit donc de résoudre l'équation $\dfrac{e^x}{1-e^x} = y$, soit $e^x = y - ye^x$, ou encore $e^x = \dfrac{y}{y+1}$. Cette équation a toujours une solution lorsque $y > 0$ (cas qui ne nous intéresse pas ici) et lorsque $y \in]-\infty, -1[$ (ce qui est notre hypothèse pour obtenir l'expression de g), solution égale à $\ln\left(\dfrac{y}{y+1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{y+1}\right)$. On en déduit donc l'expression suivante pour la fonction $g : \forall x \in]-\infty, -1[,\ g(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)$. On peut calculer à partir de cette expression $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{1 - \frac{1}{x+1}} = \dfrac{1}{(x+1)^2} \times \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{x(x+1)}$. On retrouve bien entendu l'expression précédente.

Exercice 5

1. Calculons : $f(0) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; $f(-1) = \arcsin(0) = 0$ et $f(1) = \arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{4}}\right) = \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Il n'y a que deux limites à calculer, quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (le reste du temps, la fonction est toujours définie puisque $2x^2 + 2$ est strictement positif). On peut écrire $u(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2(2 + \frac{2}{x^2})}} = \dfrac{x+1}{|x|\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}}$. Quand $x > 0$, on peut oublier la valeur aboslue, et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$, il ne reste plus que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. C'est exactement le même calcul de l'autre côté, au détail près que $|x| = -x$. Autrement dit, on aura $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
3. C'est un simple calcul de dérivée de quotient : $u'(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+2} - (x+1) \times \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+2}}}{2x^2+2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 2x(x+1)}{(2x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2-2x}{(2x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$, comme prévu. Cette dérivée est simplement du signe de $2 - 2x$, donc positive sur $]-\infty, 1]$ et négative ensuite. La fonction u admet donc un maximum en 1 de valeur $u(1) = 1$. On ajoute la valeur en -1 dans le tableau qui est évidente :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
u	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. Puisque u est définie sur $\mathbb{R}$, seul l'arcsinus peut poser problème. La fonction f est donc définie quand $u(x) \in [-1, 1]$, ce qui est toujours le cas d'après l'étude de la fonction u. On a donc simplement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus, par une simple composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.
5. On va bien sûr réutiliser le calcul de u' effectué plus haut : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = \dfrac{2-2x}{(2x+2)^{\frac{3}{2}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{2x^2+2}}} = \dfrac{2-2x}{2x^2+2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 2 - x^2 - 2x - 1}} = \dfrac{1-x}{1+x^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = \dfrac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{(1-x)^2}} = \dfrac{1-x}{(1+x^2)|1-x|}$. Il est temps de distinguer nos deux cas :

- sur $]-\infty,1[$, $|1-x| = 1-x$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- sur $]1,+\infty[$, $|1-x| = x-1$ donc $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

6. On reconnait (au signe près selon l'intervalle) la dérivée de la fonction arctange. On en déduit donc que :
   - $\forall x \in]-\infty,1[$, $f(x) = \arctan(x)+k$, pour une certaine constante $k \in \mathbb{R}$. Comme $\arctan(0) = 0$, on a $k = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $f(x) = \arctan(x) + \dfrac{\pi}{4}$ sur cet intervalle.
   - $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) = k' - \arctan(x)$, pour une certaine constante $k' \in \mathbb{R}$. Pour déterminer k', on peut par exemple constater que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k' - \dfrac{\pi}{2}$, ce qui impose $k' = \dfrac{3\pi}{4}$. Autrement dit, $f(x) = \dfrac{3\pi}{4} - \arctan(x)$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
7. Bornons-nous à signaler que les deux formules obtenues sont cohérentes avec le maximum $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ de la fonction f, qui a les mêmes variations que la fonction u (elle n'est par contre pas dérivable en 1, pas de tangente horizontale à cet endroit de la courbe ; si on veut être très précis, les formules obtenues prouvent qu'il y aura en 1 deux demi-tangentes de pentes respectives $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$).