Devoir Surveillé n^{o} 2

PTSI B Lycée Eiffel

10 octobre 2020

Exercice 1

Les questions de ce premier exercice sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2x+3} \leqslant x-1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^4(2x) - 3\cos^2(2x) = -1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{(x^3)} = 3^{(x^2)}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \dfrac{2\pi}{3}$.
5. Sur le modèle des formules de duplication, exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$. En déduire la valeur de $\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2+\sqrt{3})$.

Exercice 2

On pose pour cet exercice $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer ses limites aux bornes de ce domaine.
2. On constate aisément que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(1-x) = f(x)$. Cette égalité traduit une symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une droite, laquelle ?
3. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations complet.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$?
5. Tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ tenant compte de tous les calculs effectués jusqu'ici.
6. Déduire des questions précédentes la valeur minimale prise par l'expression $x^x \times (1-x)^{1-x}$ lorsque $x \in]0,1[$.

Exercice 3

On pose dans cet exercice $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{1 - 2\sin^2(x)}$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f, ainsi qu'un domaine d'étude pertinent de cette même fonction.
2. Exprimer $f(x)$ uniquement en fonction de $\cos(2x)$.
3. Calculer et simplifier $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
4. Déterminer tous les antécédents de 1 par la fonction f.
5. Calculer la dérivée de la fonction f et étudier ses variations sur une période (on doit obtenir une dérivée du signe de $\sin(x)\cos(x)$).
6. Tracer une allure de la courbe représentative de f (on tracera au moins une période complète).

Exercice 4

On pose dans cet exercice $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f. La fonction f a-t-elle une parité notable (justifier rigoureusement votre réponse) ?
2. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations complet.
3. Montrer que, $\forall x > 0$, $f'(x) = f(x) + f(x)^2$.
4. Montrer que f effectue une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ vers un intervalle I à préciser. On notera g la réciproque de cette bijection. Donner le tableau de variations de la fonction g.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln(2)$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en son point d'abscisse -2 (presque aucun calcul n'est nécessaire).
6. Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives des fonctions f et g, ainsi que les tangentes calculées à la question précédente.
7. Sans chercher pour l'instant à exprimer explicitement $g(x)$, calculer sa dérivée g' à l'aide de la formule de dérivée d'une réciproque (on pourra aussi penser à réutiliser le résultat de la question 3).
8. Résoudre l'équation $f(x) = y$ et en déduire une expression explicite de la fonction g. Retrouver à l'aide de cette expression le résultat de la question précédente.

Exercice 5

Pour ce dernier exercice, on s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}\right)$.
On posera également $u(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$.

1. Calculer $f(0)$, $f(-1)$ et $f(1)$.
2. Calculer rigoureusement les limites de la fonction u aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que $u'(x) = \dfrac{2-2x}{(2x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$. En déduire le tableau de variations complet de la fonction u.
4. En exploitant les résultats précédents, déterminer le domaine de définition de la fonction f, ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et simplifier son expression en distiguant deux cas selon que $x < 1$ ou $x > 1$.
6. En déduire une expression simplifiée de f sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
7. Tracer une allure précise de la courbe représentative de la fonction f.