Devoir Surveillé n° 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 septembre 2020

Exercice 1

1. On commence bien sûr par tout passer à gauche et mettre au dénominateur, le membre de gauche vaut alors : $G = \dfrac{2x+5}{x-2} - \dfrac{3x-6}{x+4} - 2 = \dfrac{(2x+5)(x+4)-(3x-6)(x-2)-2(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{2x^2+13x+20-3x^2+12x-12-2x^2-4x+16}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{-3x^2+21x+24}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{-3(x^2-7x-8)}{(x-2)(x+4)}$.
Le trinôme x^2-7x-8 admet -1 pour racine évidente, mais on peut aussi calculer son discriminant $\Delta = 49+32 = 81$ et retrouver les deux racines $x_1 = \dfrac{7+9}{2} = 8$ et $x_2 = \dfrac{7-9}{-2} = -1$.
Il ne reste plus qu'à conclure par un beau tableau de signes :

x		-4		-1		2		8	
$-3(x^2-7x-8)$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$
$(x-2)(x+4)$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
G	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$

On conclut donc que $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]-1, 2[\cup]8, +\infty[$.

2. L'équation est vérifiée si et seulement si $|x| - |x-1| = 1$ ou $|x| - |x-1| = -1$. Faisons un tableau d'expressions pour $|x| - |x-1|$:

x		0		1	
$\lvert x\rvert$	$-x$	0	x	|	x
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	|	$1-x$	0	$x-1$
$\lvert x\rvert - \lvert x-1\rvert$	-1	|	$2x-1$	|	1

L'équation est donc toujours vérifié si $x \leqslant 0$, ou si $x \geqslant 1$. Sur l'intervalle $[0,1]$, on doit avoir $2x-1 = 1$, soit $x = 1$, ou $2x-1 = -1$, soit $x = 0$, ce qui n'ajoute pas de solutions supplémentaires. Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

3. On vérifie que -1 est solution évidente de l'équation : $2\times(-1)^3 - 3\times(-1)^2 + 8 - 3 = -2-3+8-3 = 0$. On peut donc factoriser notre membre de gauche sous la forme $2x^3-3x^2-8x-3 = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$. Par identification des coefficients, on trouve $a = 2$, puis $a+b = -3$, donc $b = -5$, et $b+c = -8$, donc -3, ce qui est cohérent avec la dernière équation. Le trinôme $2x^2-5x-3$ ayant pour discriminant $\Delta = 25+24 = 49$ et pour racines $x_1 = \dfrac{5-7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+7}{4} = 3$, on conclut : $\mathcal{S} = \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 3\right\}$.

4. L'inéquation n'a pas de sens si $x < 2$ à cause de la racine carrée du membre de gauche. De plus, on peut l'écrire sous la forme $\sqrt{x-2} < x-4$, inéquation qui ne peut pas être vérifiée si $x < 4$ (le membre de droite étant alors négatif alors que celui de gauche est positif). Quand $x \geqslant 4$, on peut tout élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $x-2 < x^2-8x+16$, soit $x^2-9x+18 > 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 81-72 = 9$, et pour racines $x_1 = \dfrac{9-3}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{9+3}{2} = 6$. Avec la condition $x \geqslant 4$, on ne garde comme solution que l'intervalle $]6, +\infty[$.

5. On va bien sûr faire un « tableau de signes » de l'expression $A = |3-x|+|2x+3|-|x^2-x-2|-2$. Les seuls calculs préalables sont ceux ceux des racines du trinôme $x^2 - x - 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et s'annule donc en $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et en $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

x	$-\frac{3}{2}$	-1	2	3	
$\|x-3\|$	$3-x$	$3-x$	$3-x$	$3-x$ 0	$x-3$
$\|2x+3\|$	$-2x-3$ 0	$2x+3$	$2x+3$	$2x+3$	$2x+3$
$\|x^2-x-2\|$	x^2-x-2	x^2-x-2 0	$x+2-x^2$ 0	x^2-x-2	x^2-x-2
A	$-x^2-2x$	$-x^2+2x+6$	x^2+2	$-x^2+2x+6$	$-x^2+4x$

On résout ensuite l'inéquation $A \leqslant 0$ sur chacun des intervalles :
- sur $\left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right]$, on obtient $-x(x+2) < 0$, ce qui est vérifié sur tout l'intervalle $]-\infty,-2[$.
- sur $\left[-\dfrac{3}{2}, -1\right]$ et sur $[2,3]$, c'est la même inéquation $-x^2 + 2x + 6 < 0$. Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 24 = 28$ et admet pour racines $x_3 = \dfrac{-2-\sqrt{28}}{-2} = 1 + \sqrt{7}$ et $x_4 = \dfrac{-2+\sqrt{28}}{-2} = 1 - \sqrt{7}$. Comme $1 + \sqrt{7} > 3$ (la racine carrée de 7 est certainement supérieure à 2) et $1 - \sqrt{7} < -\dfrac{3}{2}$ (c'est moins évident mais $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} < 7$ suffit à le justifier), les intervalles de résolution sont entièrement compris entre les deux racines, et il n'y a donc aucune solution à notre inéquation sur ces intervalles.
- sur $[-1, 2]$, l'inéquation $x^2 < -2$ n'a manifestement aucune solution réelle.
- enfin, sur $[3, +\infty[$, la condition $x(4-x) < 0$ permet d'obtenir comme second intervalle de solutions $]4, +\infty[$.

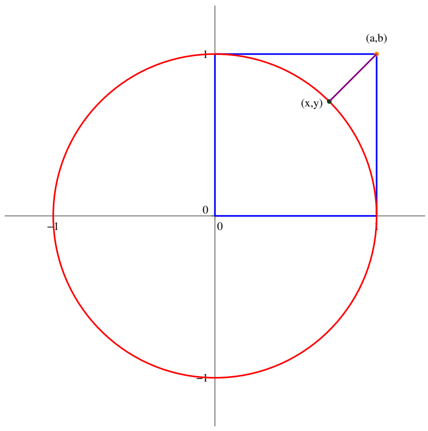
Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$.

6. On commence déjà par signaler que, si $m = 1$, l'équation n'est pas une équation du second degré. On a dans ce cas $2x+3 = 0$, donc une unique solution $x = -\dfrac{3}{2}$. Dans tous les autres cas, on peut calculer le discriminant $\Delta = 4m^2-4(m-1)(m+2) = 4(m^2-m^2-m+2) = 4(2-m)$. On distingue les cas suivants :
   - si $m > 2$, le discriminant est strictement négatif, il n'y a donc pas de racine réelle.
   - si $m = 2$, $\Delta = 0$ et l'équation admet pour racine double $x = -\dfrac{2m}{2(m-1)} = -\dfrac{4}{2} = -2$.
   - si $m < 2$ (et $m \neq 1$), $\Delta > 0$ et il y aura deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-2m - \sqrt{4(2-m)}}{2(m-1)} = \dfrac{m+\sqrt{2-m}}{1-m}$ et $x_2 = \dfrac{m-\sqrt{2-m}}{m-1}$.

Exercice 2

1. FAUX, ça ne marche que si x et y sont de même signe. Un contre-exemple simple : $x = -1$ et $y = 1$.
2. VRAI, cet énoncé signifie simplement que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. FAUX, en choisissant des valeurs de z et de t positives on trouve très facilement des contre-exemples. Par exemple $x = -2$, $y = -1$, $z = 1$ et $t = \dfrac{3}{2}$ donne $xz = -2$ et $yt = -\dfrac{3}{2}$, ce qui contredit l'énoncé.
4. VRAI, on peut toujours prendre $y = -1$ (l'énoncé resterait donc vrai en inversant l'ordre des quantificateurs).

5. FAUX, avec les conditions proposées on aura toujours $xy > 0$, donc $\varepsilon = -1$ (ou n'importe quelle autre valeur négative) est un contre-exemple.
6. FAUX, la propriété signifie que tout point de coordonnées (a, b) appartenant au carré bleu (cf dessin ci-dessous), on peut trouver un point de coordonnées (x, y) dans le disque trigonométrique (en rouge sur le dessin) dont le carré de la distance au premier point soit inférieure à $\frac{1}{10}$. Or, en prenant $a = 1$ et $b = 1$ (donc le point dans le coin supérieur droit du carré), le point du disque le plus proche correspond à $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et on a alors $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$, valeur encore supérieure à $\frac{1}{10}$.



Exercice 3

1. Il faut bien entendu que x ne soit pas égal à 1, mais aussi que l'expression sous le ln soit strictement positive. Elle est toujours positive en tant que valeur absolue, mais s'annule quand $x = -1$, qui est donc aussi une valeur interdire pour la fonction f. Bref, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.
2.
   - $f(-2) = \frac{1}{-3} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-1}{3} \right| = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln(3) = -\frac{1}{3} - \ln(\sqrt{3})$.
   - $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{-\frac{2}{5}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} \right| = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln(4) = \ln(2) - \frac{5}{2}$.
   - $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right| = \frac{1+\sqrt{2}}{2-1} + \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2})^2 = 1 + \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$.
3. Les limites les plus faciles à calculer sont celles en -1. On a alors $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$, et $\lim\limits_{x \to -1} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -1} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 0 = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ (à droite comme à gauche, aucune raison de distinguer deux cas ici).
   Regardons ensuite ce qui se passe à l'infini : en gardant les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 0$, puis $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.
   Enfin, $\lim\limits_{x \to 1} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = +\infty$ (à gauche comme à droite avec la valeur absolue), donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| =$

$+\infty$. Aucun problème du côté droit, on a $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Mais à gauche de 1, on a une belle forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ». Comme on manque un peu de technique pour effectuer le calcul vraiment rigoureusement, on se contentera d'invoquer sans plus de précisions la croissance comparée (de fait c'en est bien une, mais loin d'être élémentaire) pour cacher sous le tapis le morceau contenant un ln et prétendre que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.
La courbe admettra donc trois asymptotes : les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 1$, et l'axe des abscisses qui est asymptote horizontale en $-\infty$ comme en $+\infty$.

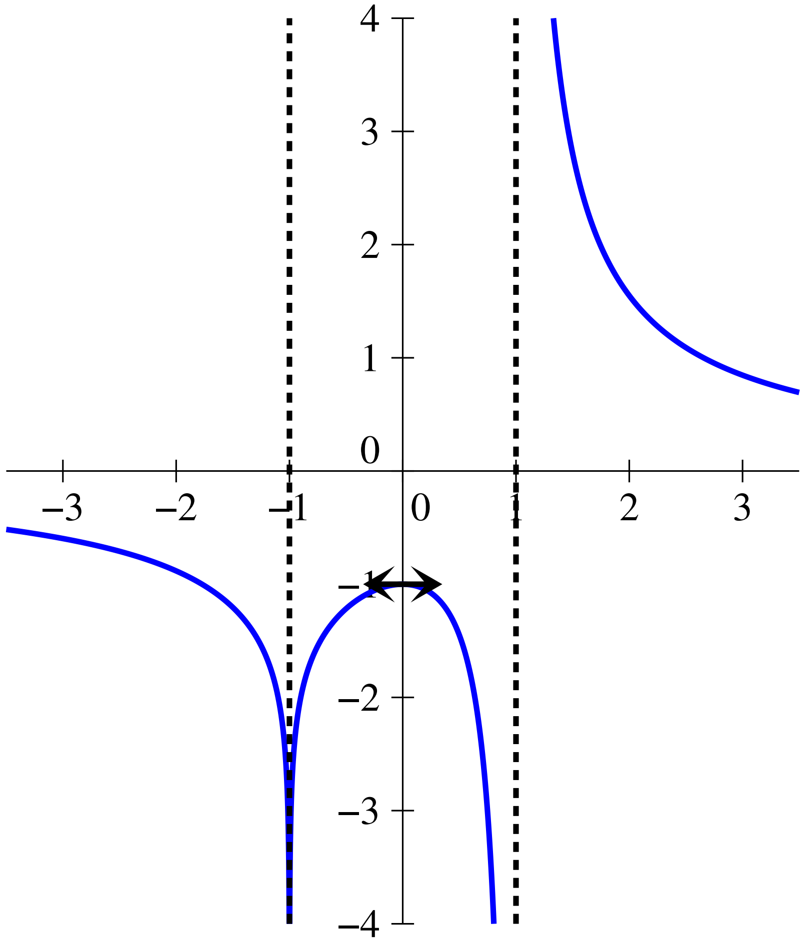
4. Il suffit d'étudier le signe de ce qui se trouve dans la valeur absolue. Ce quotient est du même signe que le produit $(1+x)(1-x)$, donc positif entre ses racines 1 et -1. Autrement dit, sur $]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, et sur les deux autres intervalles de définition de f, $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, on aura $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$.

5. C'est en fait une propriété générale : la dérivée de $\ln|u|$ vaut toujours $\dfrac{u'}{u}$, quel que soit le signe de la fonction u. En effet, sur les intervalles où u est positive, on peut enlever la valeur absolue et utiliser la formule de dérivation habituelle. Mais sur ceux où u est négative, on dérive alors $\ln(-u)$, ce qui donne $\dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$ après annulation des deux signes moins.
Ici, on peut donc calculer la dérivée sur $]-1,1[$, la formule restera valable sur les autres intervalles de définition de f. Commençons par poser $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et calculons $u'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$. Il est maintenant temps de dériver f : $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{-1-x+1-x}{(1-x)^2(1+x)} = -\dfrac{2x}{(1-x)^2(1+x)}$.

6. La dérivée calculée est du signe de $-\dfrac{2x}{1+x}$, c'est-à-dire du signe de $-x(1+x)$, qui s'annule en 0 (et en -1, mais c'est une valeur interdite pour f), et sera positive uniquement sur l'intervalle $]-1,0]$. La seule valeur à calculer pour compléter notre tableau de variations est $f(0) = -1 + \ln(1) = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

7. Voici une belle allure de courbe :



8. Sans chercher à justifier très rigoureusement (il faudrait parler de bijection pour cela), une étude précise du tableau de variations ou de la courbe donne les cas suivants :
   - si $a < -1$, l'équation $f(x) = a$ admet trois solutions : une sur $]-\infty, -1[$, une sur $]-1, 0[$ et une sur $]0, 1[$.
   - si $a = -1$, l'équation n'a plus que deux solutions : une sur $]-\infty, -1[$ et $x = 0$.
   - si $-1 < a < 0$, il ne reste qu'une seule solution appartenant à $]-\infty, -1[$.
   - si $a = 0$, on trouve le seul cas où l'équation n'a aucune solution.
   - si $a > 0$, on a à nouveau une solution unique, appartenant cette fois-ci à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Il vaut mieux viser la perfection et la manquer,
que viser l'imperfection et l'atteindre.

Bertrand Russell