Devoir Surveillé n^{o} 1

PTSI B Lycée Eiffel

19 septembre 2020

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\dfrac{2x+5}{x-2} - \dfrac{3x-6}{x+4} < 2$
2. $||x| - |x-1|| = 1$
3. $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$
4. $\sqrt{x-2} + 5 - x < 1$
5. $|3-x| + |2x+3| < |x^2 - x - 2| + 2$
6. $(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ (ici, m est un paramètre réel, on discutera des cas selon la valeur de m).

Exercice 2

Parmi les affirmations suivantes, déterminer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Dans le cas où une affirmation est fausse, donner un contre-exemple pour justifier votre affirmation (en détaillant vos explications si besoin).

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $x < y \Rightarrow \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leqslant y \Rightarrow x^3 \leqslant y^3$
3. $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $x \leqslant y \leqslant 0$ et $z \leqslant t \Rightarrow xz \geqslant yt$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant y$
5. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}^{-*}$, $\exists y \in \mathbb{R}^{-*}$, $xy < \varepsilon$
6. $\forall (a,b) \in [0,1]^2, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1$ et $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \dfrac{1}{10}$

Exercice 3

On définit pour cet exercice une fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Justifier soigneusement le domaine de définition de f.
2. Calculer les images suivantes, en simplifiant au maximum les résultats obtenus : $f(-2)$, $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, $f(\sqrt{2})$.
3. Déterminer toutes les limites importantes pour l'étude de la fonction f. Combien la courbe $\mathcal{C}_f$ admettra-t-elle d'asymptotes ?
4. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeurs absolues, en distinguant éventuellement plusieurs intervalles.
5. Expliquer pourquoi l'expression de la dérivée f' ne dépend pas de l'intervalle d'étude, puis calculer $f'(x)$.
6. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
7. Tracer une allure précise de la courbe $\mathcal{C}_f$.
8. Étudier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$.