

AP : Séance n° 9

PTSI B Lycée Eiffel

12 mars 2021

Pour s'échauffer

Les deux questions sont complètement indépendantes :

1. Factoriser le polynôme $P = X^3 - X^2 - \frac{39}{4}X - 9$ sachant qu'il admet une racine double.
2. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \\ xyz = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Une suite de polynômes.

On considère la suite de polynômes (P_n) définie par $P_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n.$$

1. Calculer P_1 et P_2 .
2. On note a_n le coefficient dominant de P_n . Montrer par récurrence que $d^\circ(P_n) = n$ et que $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire la valeur de a_n .
3. Montrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. Que peut-on dire de la parité du polynôme P_n ?
4. On cherche dans cette question une expression intégrale de P_{n+1} .
 - (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P'_{n+1} = (n+2)P_n$.
 - (b) Calculer $P_n(0)$ (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n).
 - (c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$.
 - (d) Calculer à l'aide des questions précédentes P_3 et P_4 .
5. On cherche désormais une expression explicite du polynôme P_n .
 - (a) Montrer que $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0$.
 - (b) Pour un réel x fixé, exprimer $P_n(x)$ en fonction de x et de n en utilisant la question précédente (et vos connaissances sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2).
 - (c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = \frac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$.
6. Déterminer les racines du polynôme P_n et sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Calculer la somme et le produit des racines de P_n .

Des suites d'intégrales.

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et $J_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 , puis I_3 à l'aide d'une IPP intelligente (I_0 est de loin la plus compliquée, on pourra effectuer le changement de variable $x = \operatorname{sh}(t)$).
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) , ainsi que sa limite.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $I_n + I_{n-2} = J_n$.
4. À l'aide d'une IPP, montrer que, si $n \geq 3$, on a $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
5. Dédire des questions précédentes la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.