AP n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 janvier 2021

Quelques exercices indépendants sur les suites.

1. La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-2x+2=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4-8 = -4$ et admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = 1-i$. On met sans difficulté z_1 sous forme exponentielle : $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On peut alors affirmer qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(A\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$. Les conditions initiales se traduisent par $u_0 = A = 1$ et $u_1 = \left(A\dfrac{\sqrt{2}}{2} + B\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \sqrt{2} = 3$, donc $A+B=3$ et $B=2$. Il ne reste plus qu'à conclure : $u_n = \left(\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$.
2. Cette suite-là n'est pas récurrente linéaire d'ordre 2, mais elle peut le devenir ! Tous les termes de la suite étant strictement positifs (récurrence double triviale), on peut appliquer un coup de ln autour de la relation de récurrence, pour obtenir $\ln(u_{n+2}) = \dfrac{1}{2}(9\ln(u_{n+1}) - 4\ln(u_n))$. En posant $v_n = \ln(u_n)$, on a donc $v_{n+1} = \dfrac{9}{2}v_{n+1} - 2v_n$. Cette fois, on a bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{9}{2}x + 2 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \dfrac{81}{4} - 8 = \dfrac{49}{4}$, et on a deux racines réelles $r_1 = \dfrac{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}{2} = 4$ et $r_2 = \dfrac{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$. On peut donc écrire $v_n = A \times 4^n + \dfrac{B}{2^n}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions initiales donnent $v_0 = \ln(1) = 0 = A+B$, et $v_1 = \ln(2) = 4A + \dfrac{B}{2}$. On en déduit $A = \dfrac{2\ln(2)}{7}$ et $B = -\dfrac{2\ln(2)}{7}$. Conclusion : $v_n = \dfrac{2\ln(2)}{7}\left(4^n - \dfrac{1}{2^n}\right)$, puis $u_n = e^{v_n} = 2^{\frac{2}{7}(4^n - \frac{1}{2^n})}$.
3. Il faut penser à appliquer le théorème des gendarmes, en se rappelant que la définition de la partie entière implique que $kx - 1 < \mathrm{Ent}(kx) \leqslant kx$. On en déduit (en sommant de telles inégalités) que $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kx$. Or, on sait très bien calculer les sommes intervenant dans cet encadrement (quitte à sortir la constante x de la somme) : $\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{xn(n+1)}{2} - n\right) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{xn(n+1)}{2}$, soit $\dfrac{(n+1)x-2}{2n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{(n+1)x}{2n}$. Les membres extrêmes de cet encadrement ont tous les deux la même limite $\dfrac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, donc on peut conclure que $\lim u_n = \dfrac{x}{2}$.
4. Commençons par déterminer la monotonie des deux suites : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} -$

$$\sum_{k+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) = \frac{2}{2\sqrt{n+2}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} > 0$$

puisque $2\sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ (on a utilisé la multiplication par la quantité conjuguée de façon très inhabituelle en cours de route). La suite (u_n) est donc croissante. De même, on calcule $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \dfrac{2}{2\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0$, donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin, $u_n - v_n = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, qui a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Les deux suites sont donc bien adjacentes, et ont une limite commune l. De plus, on aura, quel que soit l'entier naturel n, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$ (les inégalités sont même strictes). On calcule $u_1 = 1 - 2\sqrt{2}$ et $v_1 = -1$ (il y a une coquille dans l'énoncé) pou obtenir l'encadrement demandé. Comme on sait que $|u_n - l| \leqslant v_n - u_n$, il suffit d'avoir $v_n - u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leqslant 10^{-2}$, soit $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 200$. Cela sera vrai a fortiori si $2\sqrt{n} > 200$, soit $\sqrt{n} > 100$ ou encore $n > 10\ 000$. Eh oui, la convergence des deux suites est très lente !

Des histoires de matrices.

1. Aucune méthode n'était imposée, faisons donc un bon vieux pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 12 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 12 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 15 & 18 & -21 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/12 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Calculons : $P - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $(P-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, et $(P-I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui est exactement égal à $2P$. On a donc $(P-I)^3 - 2P = 0$, soit en développant tout

$P^3-3P^2+P-I=0$. On peut écrire cette égalité sous la forme $P(P^2-3P+I)=I$, la matrice P est donc inversible, d'inverse P^2-3P+I. On peut alors calculer $P^2=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&2\\2&6&3\end{pmatrix}$, puis $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ (on vérifie si on le souhaite que ça marche).

3. On calcule encore une fois brillamment $AP=\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&2&3\\-1&4&4\end{pmatrix}$. De façon extrêmement inattendue, on obtient exactement la même chose pour PT (mais si) !
4. C'est une récurrence hyper classique : pour $n=0$, on a bien $PT^0P^{-1}=PP^{-1}=I=A^0$, et si on suppose la formule vraie au rang n, en utilisant le calcul précédent, on aura $A^{n+1}=A\times A^n=APT^nP^{-1}=PTT^nP^{-1}=PT^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$. Regardons ce qui se passe pour $n=-1$: on calcule d'abord $A^{-1}P=\begin{pmatrix}-1&1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\-1&1&0\end{pmatrix}$, puis $P^{-1}A^{-1}P=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. On vérifie facilement que cette matrice est l'inverse de la matrice T, ce qui prouve que $P^{-1}A^{-1}P=T^{-1}$, ce qui est équivalent à ce qui était demandé. La formule reste donc vraie pour $n=-1$.
5. On va évidemment procéder par récurrence. La propriété est vraie au rang 0 en posant $\alpha_0=0$, et aussi au rang 1 en posant $\alpha_1=1$. Supposons que ça marche au rang n, alors $T^{n+1}=T\times\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&2^n&\alpha_n\\0&0&2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}&0&0\\0&2^{n+1}&2\alpha_n+2^n\\0&0&2^{n+1}\end{pmatrix}$, ce qui est bien de la forme souhaitée avec $\alpha_{n+1}=2\alpha_n+2^n$. Cette suite n'est pas une suite classique, hélas, donc on ne peut pas faire grand chose avec (oui, l'énoncé de la question était un ignoble piège).
6. On pose donc $J=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, et on obtient immédiatement $J^k=\begin{pmatrix}(-3)^k&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(-3)^{k-2}J^2$, pour tout entier $k\geqslant 2$. Si on tient vraiment à le démontrer par récurrence, on le fait (mais c'est trivial).
7. Puisque $T=J+2I$, on va appliquer la formule du binome (les matrice $2I$ et J commutant bien évidemment) : $T^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k(2I)^{n-k}=2^nI+n2^{n-1}J+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-3)^{k-2}J^2=2^nI+n2^{n-1}J+\frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k2^{n-k}J^2-2^nJ^2+3n2^{n-1}J^2\right)=2^nI+n2^{n-1}J+\frac{((3n-2)2^{n-1}+(-1)^n)}{9}J^2$.
Il n'est en fait pas vraiment utile de détailler le calcul de tous les coefficients de T^n, puisqu'on les connait déjà tous sauf celui égal à α_n (rien n'empêche bien entendu de vérifier que ça donne bien les bonnes valeurs sur la diagonale, ce qui est le cas). On déduit de la formule précédente que $\alpha_n=n2^{n-1}$ (seule la matrice J a un coefficient non nul à cet endroit), ce qui est cohérent avec la relation de récurrence trouvée pour la suite : $2\alpha_n+2^n=n2^n+2^n=(n+1)2^n=\alpha_{n+1}$. Finalement, $T^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{pmatrix}$. Il reste ensuite à calculer $PT^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&2^{n+1}&n2^n\\0&2^n&(n+2)2^{n-1}\\(-1)^n&2^{n+1}&(n+1)2^n\end{pmatrix}$, puis

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (2-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-2)2^n + 2(-1)^n \\ -n2^{n-1} & 2^n & n2^{n-1} \\ (1-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-1)2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

8. (a) Supposons que $AM = MA$, alors $AMP = MAP = MPT$, puis $P^{-1}AMP = P^{-1}MPT$, soit $TP^{-1}MP = P^{-1}MPT$. La matrice $P^{-1}MP$ commute bien avec T. La réciproque se fait exactement de la même façon.

   (b) Bourrinons en posant $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a alors $BT = \begin{pmatrix} -a & 2b & b+2c \\ -d & 2e & e+2f \\ -g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$, et $TB = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si $b = c = d = g = h = 0$ (conditions obtenus facilement en regardant les coefficients hors de la diagonale), et $e = i$ (à cause du coefficient deuxième ligne troisième colonne). Autrement dit, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

   (c) Le calcul de la question a prouve que les matrices commutant avec A sont de la forme PBP^{-1}, où B commute avec T. On calcule donc $PB = \begin{pmatrix} a & 2e & 2f \\ 0 & e & e+f \\ a & 2e & e+2f \end{pmatrix}$, puis $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} -a+2e-2f & -2a+2e & 2a-2e+2f \\ -f & e & f \\ -a+e-2f & -2a+2e & 2a-e+2f \end{pmatrix}$. Toutes les matrices de cette forme commutent donc avec A (en particulier A elle-même, qui est obtenue pour $a = -1$, $e = 2$ et $f = 1$, et la matrice identité obtenue lorsque $a = e = 1$ et $f = 0$).