

AP : Séance n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

11 décembre 2020

Un petit exercice de dénombrement.

1. L'ordre est important, les répétitions ne sont bien sûr pas permises, on utilise des arrangements : $\frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.
2. Puisqu'il y a trois équipes de profs de maths, la seule chose à choisir est l'ordre dans lequel sont situées ces trois équipes sur le podium, ce qui fait $3! = 6$ possibilités.
3. Comptons le nombre de podiums sans profs de maths : puisqu'il n'y a plus que cinq équipes disponibles il vaut (calcul identique à celui de la première question) $\frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$. Par passage au complémentaire, le nombre de podium avec au moins une équipe de profs de maths est donc $336 - 60 = 276$.
4. On choisit une équipe de profs de maths parmi les trois disponibles, deux autres équipes parmi celles qui ne contiennent pas de profs de maths, puis on détermine l'ordre : $\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$.

Du classique sur les complexes.

1. On peut tout faire d'un seul coup en exhibant la réciproque (si elle existe, c'est nécessairement que f est bijective). Notons donc $Z = f(z) = \frac{1}{\bar{z} + i}$, alors $Z\bar{z} + iZ = 1$, donc $\bar{z} = \frac{1 - iZ}{Z}$ (en supposant $Z \neq 0$), et $z = \frac{1 + i\bar{Z}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}} + i$. Tout nombre complexe Z non nul admet donc un unique antécédent par f dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. L'application f est bijective, et $f^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}} + i$.
2. (a) En posant $z = a + ib$, on trouve $f(z) = \frac{1}{a - ib + i} = \frac{a + i(b - 1)}{a^2 + (1 - b)^2} = \frac{a}{a^2 + (1 - b)^2} + i \frac{b - 1}{a^2 + (1 - b)^2}$.
(b) Au vu de la formule précédente, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b - 1 = 0$, soit $b = 1$. Autrement dit, z est de la forme $a + i$, et se trouve dans le plan complexe sur la droite horizontale d'équation $y = 1$ (on doit enlever tout de même $z = i$, valeur pour laquelle la fonction n'est pas définie).
(c) Cette fois-ci, on obtient encore plus simplement $a = 0$, donc z doit être lui-même imaginaire pur (sur l'axe des ordonnées dans le plan complexe), en éliminant bien sûr la valeur interdite $z = i$.
(d) Soit à partir de la forme algébrique, soit directement sous la forme $\frac{1}{\bar{z} + i}$, on voit que $|f(z)| = 1$ est équivalent à $a^2 + (b - 1)^2 = 1$. Même pas la peine de modifier quoi que ce soit, on reconnaît immédiatement le cercle de centre $A(i)$ et de rayon 1.

3. On veut donc avoir $\frac{1}{\bar{z}+i} = z$, soit $z\bar{z} + iz = 1$, ou encore $iz = 1 - |z|^2$. En particulier, iz doit être réel, ce qui implique que z lui-même est imaginaire pur, de la forme bi . L'équation devient alors $-b = 1 - b^2$, ou encore $b^2 - b - 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et pour racines $b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Les deux points fixes de la fonction f sont donc $z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}i$ et $z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}i$.
4. Soit $z = x$ appartenant à $\mathbb{R}$, alors $f(z) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}i$. Pour vérifier que ce nombre a une image située sur le cercle de l'énoncé, il suffit de calculer sa distance au point A , soit $\left|z + \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{x}{x^2 + 1} + i\frac{x^2 + 1 - 2}{2(x^2 + 1)}\right| = \frac{\sqrt{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 4}}{2(x^2 + 1)} = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^2 4}}{2(x^2 + 1)} = \frac{1}{2}$. Le point est bien sur le cercle voulu, mais il faudrait maintenant prouver réciproquement que tout point de ce cercle a un antécédent réel. Un point sur ce cercle a pour affixe un nombre complexe de la forme $\frac{-i}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2}$ (avec $\theta \notin 0[2\pi]$). On peut alors écrire $f^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}} + i = \frac{2}{i + e^{-i\theta}} + i = \frac{1 + ie^{-i\theta}}{i + e^{-i\theta}} = \frac{(1 + ie^{-i\theta})(e^{i\theta} - i)}{|i + e^{-i\theta}|^2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{|i + e^{-i\theta}|^2} \in \mathbb{R}$ (on reconnaît au numérateur $2\cos(\theta)$ via les formules d'Euler).

Un autre petit exercice de dénombrement.

- Puisqu'il s'agit de tirages simultanés et qu'il y a 10 jetons dans l'urne au total, $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$ tirages possibles.
- Il faut donc choisir deux jetons bleus parmi les six disponibles, et deux jetons rouges parmi les quatre disponibles : $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$ possibilités.
- Il n'y a plus que huit jetons parmi lesquels effectuer nos tirages : $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 70$ possibilités.
- Une méthode intelligente consiste à trier les cas selon le nombre de jetons rouges tirés : si on tire les quatre jetons rouges, ils ont bien entendu des numéros différents et il n'y a qu'une seule possibilité ; si on tire trois jetons rouges, on aura donc déjà tiré trois numéros distincts, et il faudra choisir le dernier jeton parmi les trois jetons bleus ayant des numéros différents de deux déjà tirés, ce qui fait $\binom{4}{3} \times \binom{3}{1} = 12$ possibilités ; si on tire deux jetons rouges, il restera quatre numéros possibles chez les bleus parmi lesquels tirer les deux jetons restants, soit $\binom{4}{2} \times 24 = 36$ possibilités ; de même si on ne tire qu'un rouge, il restera cinq numéros possibles chez les bleus et $4 \times \binom{5}{3} = 40$ possibilités ; enfin, si on ne tire pas de jetons rouges, tous les tirages de jetons bleus sont possibles, soit $\binom{6}{4} = 15$ possibilités. Au total, on a donc $1 + 12 + 36 + 40 + 15 = 104$ tirages convenables.
- Question idiote : pour obtenir une somme égale à 6 avec des tirages simultanés, il faut forcément piocher les deux jetons numérotés 1 et les deux jetons numérotés 2, il n'y a qu'un seul tirage convenable.
- (a) On va donc maintenant travailler avec des listes, le nombre total de tirages possibles est $10^4 = 10\,000$.

- (b) Il faut choisir les deux jetons rouges, les deux jetons bleus, et par exemples la position des deux jetons rouges parmi les quatre tirages, soit $4^2 \times 6^2 \times \binom{4}{2} = 16 \times 36 \times 6 = 3456$.
- (c) C'est le même principe que ci-dessus mais avec des listes, $8^4 = 4\,096$ tirages possibles.
- (d) Pour changer, on va raisonner différemment : soit on ne tire ni 5 ni 6 et donc exactement une fois chacun des quatre autres chiffres, on a pour cela $2^4 \times 4! = 16 \times 24 = 384$ possibilités (il faut choisir la couleur de chaque jeton, et l'ordre) ; soit on tire le 5 mais pas le 6, il y a $\binom{4}{3} \times 2^3 \times 4! = 768$ possibilités (on choisit les trois autres chiffres, puis leur couleur, et enfin l'ordre) ; même chose si on tire le 6 mais pas le 5 ; enfin si on tire à la fois le 5 et le 6, on aura $\binom{4}{2} \times 2^2 \times 4! = 576$ cas. On trouve donc au total $384 + 2 \times 768 + 576 = 2\,496$, soit en fait exactement 24 fois plus que ce qu'on avait trouvé pour des tirages simultanés, ce qui est bien sûr tout à fait normal puisque, les répétitions étant interdites, seul l'ordre a été ajouté au calcul.
- (e) Il n'y a pas énormément de possibilités d'obtenir 6 en additionnant quatre entiers : soit on a tiré une fois un 3 et trois fois des 1, ce qui donne $2^3 \times 2 \times 4 = 64$ tirages possibles (on choisit les 3, le 1 et sa position parmi les tirages), soit on a tiré deux fois 2 et deux fois 1, ce qui donne $2^2 \times 2^2 \times \binom{4}{2} = 96$ tirages. Il y a donc au total 160 tirages convenables.