

AP : Séance n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

11 décembre 2020

Un petit exercice de dénombrement.

Lors d'un championnat de bridge, huit équipes se disputent les trois places du podium. Parmi elles, trois sont constituées de profs de maths.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles (il va de soi que l'ordre est important) ?
2. Combien de podiums sont entièrement constitués de profs de maths ?
3. Combien de podiums contiennent au moins une équipe de profs de maths ?
4. Combien de podiums contiennent exactement une équipe de profs de maths ?

Du classique sur les complexes.

On note f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ par $f(z) = \frac{1}{\bar{z} + i}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ vers $\mathbb{C}^*$, et donner une expression de sa réciproque.
2. (a) Déterminer $f(z)$ sous forme algébrique.
(b) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on donnera une interprétation géométrique).
(c) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on donnera une interprétation géométrique).
(d) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on donnera une interprétation géométrique).
3. Déterminer les points fixes de f (nombres complexes z vérifiant $f(z) = z$).
4. Montrer que l'image de la droite réelle par f est le cercle de centre $A\left(-\frac{i}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé de l'origine.

Un autre petit exercice de dénombrement.

Une urne contient 6 jetons bleus numérotés de 1 à 6, et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire simultanément quatre jetons dans l'urne.

1. Quel est le nombre total de tirages possibles ?
2. Combien de tirages pour lesquels on tire deux jetons de chaque couleur ?
3. Combien de tirages sans tirer le chiffre 2 ?
4. Combien de tirages où on obtient quatre numéros différents ?
5. Combien de tirages pour lesquels la somme des numéros tirés vaut 6 ?
6. Refaire tout l'exercice avec des tirages successifs avec remise.