AP n° 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 novembre 2020

Pour ne pas perdre la main sur les équations différentielles.

1. Faisons donc comme on nous le conseille, ou plutôt écrivons le changement de fonction inconnue dans l'autre sens : $y(t) = e^{2t}z(t)$, ce qui permet de dériver deux fois avant de remplacer dans l'équation : $y'(t) = 2e^{2t}z(t) + e^{2t}z'(t)$, puis $y''(t) = 4e^{2t}z(t) + 4e^{2t}z'(t) + e^{2t}z''(t)$. Quitte à tout simplifier par e^{2t} (qui ne s'annule évidemment jamais), l'équation de départ est donc équivalente à $4z+4z'+z''-8z-4z'+4z = \frac{1}{t^2}$, soit tout simplement $z'' = \frac{1}{t^2}$. Intuile de recourir à des méthodes classiques de résolution d'équations différentielles ici, il suffit de primitiver deux fois (en gardant par contre toutes les primitives à chaque étape) : $z'(t) = -\frac{1}{t} + K$, puis $z(t) = -\ln(t) + Kt + L$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$ (on a supposé que la résolution s'effectuait sur l'intervalle $]0, +\infty[$). Autrement dit, on aura $y(t) = e^{2t}(Kt + L - \ln(t))$.
2. Commençons par résoudre l'équation homogène associée en appliquant gentiment les formules vues en cours. On pose donc l'équation caractéristique $r^2-2r+2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$, et $r_2 = 1 - i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_h : t \mapsto (A\cos(t) + B\sin(t))e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   Pour trouver une solution particulière de l'équation, il va falloir modifier le second membre de l'équation en exploitant les formules de duplication du cosinus : $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, donc $\cos(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$. On va ensuite procéder par superposition : on chercher d'abord une solution particulière à l'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}$. Même pas besoin de calculs ici, on sait qu'une fonction constante sera solution, et la fonction $y_{p_1} : t \mapsto \frac{1}{4}$ convient manifestement.
   Reste à trouver une deuxième solution particulière y_{p_2} de l'équation $y''-2y'+2y = \frac{1}{2}\cos(2t)$.
   Deux méthodes possibles pour cela :
   - comme dans le cours, on chercher une solution complexe y_c à l'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^{2it}$ sous la forme $y_c(t) = Ke^{2it}$. On calcule très rapidement $y_c'(t) = 2iKe^{2it}$ puis $y_c''(t) = -4Ke^{2it}$, et y_c est donc solution de notre équation complexe si $(-4K - 4iK + 2K)e^{2it} = \frac{1}{2}e^{2it}$, soit $K = \frac{1}{-4-8i} = \frac{8i-4}{4^2+8^2} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{10}i$. Autrement dit, $y_c(t) = \left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{10}i\right)e^{2it}$. Or, la partie réelle de y_c vérifiera l'équation $y''-2y'+2y = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(e^{2it}) = \frac{1}{2}\cos(2t)$, ce qui permet donc de prendre $y_{p2(t)} = \operatorname{Re}(y_c(t)) = -\frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)$.
   - comme pour une équation du premier ordre, on cherche directement y_{p_2} sous la forme $y_{p_2}(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, ce qui donne $y_{p_2}'(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$, puis $y_{p_2}''(t) = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$. On remplace tout cela dans l'équation pour obtenir (après regroupement) : $(-2a-4b)\cos(2t)+(4a-2b)\sin(2t) = \frac{1}{2}\cos(2t)$. Cette égalité sera manifestement

vérifiée si on impose les deux conditions $-2a-4b=\frac{1}{2}$ et $4a-2b=0$. On en déduit $b=2a$, puis $-10a=\frac{1}{2}$, donc $a=-\frac{1}{20}$ et $b=-\frac{1}{10}$. On retrouve la même solution y_{p_2} que par l'autre méthode.

On conclut bien entendu en donnant les solutions de l'équation initiale : $y(t)=(A\cos(t)+B\sin(t))e^t-\frac{1}{20}\cos(2t)-\frac{1}{10}\sin(2t)+\frac{1}{4}$.

Une équation du deuxième ordre à résoudre en deux temps.

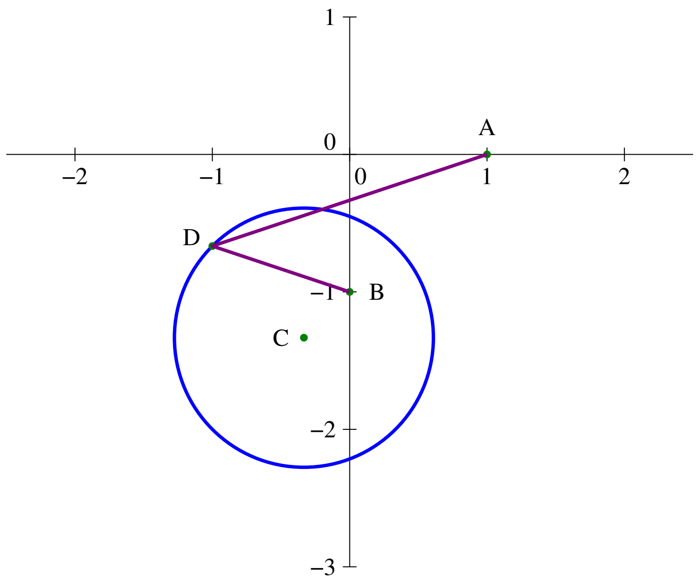
1. On normalise pour obtenir $z'-\frac{1}{x}z=x^2$. La fonction $x\mapsto -\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et y admet pour primitive la fonction $x\mapsto -\ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène associée à notre équation sont de la forme $z_h : x\mapsto Ke^{\ln(x)}=Kx$, avec $K\in\mathbb{R}$. Reste à déterminer une solution particulière z_p de l'équation complète, qu'on va chercher (par variation de la constante) sous la forme $z_p(x)=xK(x)$. On aura alors $z_p'(x)=K(x)+xK'(x)$, et z_p est donc solution de l'équation complètes si $K(x)+xK'(x)-K(x)=x^2$, soit $K'(x)=x$. On peut donc choisir $K(x)=\frac{x^2}{2}$, ce qui revient à prendre $z_p(x)=\frac{x^3}{2}$. Toutes les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $z : x\mapsto \frac{x^3}{2}+Kx$, avec $K\in\mathbb{R}$.
2. Si on pose $z=xy'-y$, on a donc $z'=y'+xy''-y'=xy''$, et $xz'-z=x^2y''-xy'-y$. Mais si y est supposée solution de (E), le membre de droite de cette égalité est égal à x^3, donc z vérifie bien l'équation $xz'-z=x^3$ qu'on vient de résoudre.
3. D'après les deux questions précédentes, toute fonction y solution de (E) vérifie $xy'-y=\frac{x^3}{2}+Kx$, ou encore $y'-\frac{1}{x}y=\frac{x^2}{2}+K$. Il ne reste plus qu'à résoudre cette deuxième équation différentielle du premier ordre. L'équation homogène associée étant exactement la même qu'à la question 1, ses solutions sont les fonctions $y_h : x\mapsto Lx$, avec $L\in\mathbb{R}$. On va chercher une solution particulière y_p de l'équation complète sous la forme $y_p(x)=xL(x)$, et un calcul identique à celui effectué plus haut donne $xL'(x)=\frac{x^2}{2}+K$, soit $L'(x)=\frac{x}{2}+\frac{K}{x}$. On peut choisir $L(x)=\frac{x^2}{4}+K\ln(x)$, soit $y_p(x)=\frac{x^3}{4}+Kx\ln(x)$. Les solutions de l'équation (E) sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x\mapsto \frac{x^3}{4}+Kx\ln(x)+Lx$, avec $(K,L)\in\mathbb{R}^2$.
4. On peut appliquer exactement la même méthode sur l'intervalle $]-\infty,0[$. Les solutions des équations homogènes des deux équations du premier ordre resteront les mêmes (le fait de remplacer dans l'exponentielle le $\ln(x)$ par un $\ln(-x)$ ne fera que changer le signe de la constante), et seule la solution particulière obtenue pour la deuxième équation devra être légèrement modifiée, en remplaçant le $\ln(x)$ par un $\ln(-x)$. On obtiendra donc des solutions de la forme $y : x\mapsto \frac{x^3}{4}+Ax\ln(-x)+Bx$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
Pour espérer recoller ces différentes solutions, elle doivent déjà avoir une limite finie en 0. C'est en fait toujours le cas : comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x\ln(-x)=0$ (croissance comparée), on aura toujours $\lim\limits_{x\to 0} y(x)=0$, à gauche comme à droite, et quelles que soient les valeurs des constantes A, B, K et L. Ce n'est pas suffisant, il faut aussi avoir des limites finies (et égales) pour les dérivées. Calulons donc : $\forall x>0$, $y'(x)=\frac{3x^2}{4}+K\ln(x)+K+L$. Si $K\neq 0$, cette dérivée aura une limite infinie en 0, il faut donc imposer $K=0$ pour espérer recoller. On a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} y'(x)=L$. De même sur $]-\infty,0[$, on devra imposer $A=0$ et on trouvera alors $\lim\limits_{x\to 0^-} y'(x)=B$ (calcul identique). Pour obtenir une fonction dérivable en 0, on impose donc

$L = B$, et on obtient alors simplement que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \dfrac{x^3}{4} + Lx$, avec $L \in \mathbb{R}$. Toutes ces fonctions sont solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Posons donc $y(x) = z(t) = z(\ln(x))$ et calculons $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. En remplaçant dans l'équation initiale, (E) est donc équivalente à $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = x^3$, donc à $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{3t}$. L'équation homogène associée à cette dernière équation a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui admet elle-même pour racine double $z = 1$. Les solutions de cette équation homogène sont donc les fonctions $z : t \mapsto (A + Bt)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}$. En cherchant une solution particulière z_p de l'équation complète sous la forme $z_p(t) = Ke^{3t}$ (avec $K \in \mathbb{R}$), on calcule $z_p'(t) = 3Ke^{3t}$ et $z_p''(t) = 9Ke^{3t}$, et z_p est donc solution si $9Ke3t - 6Ke^{3t} + Ke^{3t} = e^{3t}$, soit $4K = 1$ (on peut bien sûr simplifier par e^{3t} qui ne s'annule jamais). Autrement dit, on peut prendre $z_p(t) = \dfrac{1}{4}e^{3t}$, et les solutions de notre équation équivalente sont donc les fonctions $z : t \mapsto \dfrac{1}{4}e^{3t} + (A + Bt)e^t$. Il ne reste plus qu'à remonter le changement de variable pour trouver $y(x) = z(\ln(x)) = \dfrac{1}{4}e^{3\ln(x)} + (A + B\ln(x))e^{\ln(x)}$, soit $y(x) = \dfrac{x^3}{4} + Ax + Bx\ln(x)$, on retrouve bien sûr les mêmes solutions qu'avec l'autre méthode de résolution.

Quelques exercices sur les complexes.

1. S'il y avait un 1 à droite du signe égal, on pourrait s'en sortir facilement en constatant que la condition $|z - 1| = |z + i|$ revient à dire que le point M d'affixe z se situe sur la médiatrice du segment reliant les points A d'affixe 1, et B d'affixe $-i$. Avec un 2, c'est nettement plus compliqué, on peut toujours écrire (en élevant tout au carré pour simplifier le calcul ultérieur) $|z - 1|^2 = 4|z + i|^2$. On pose alors très brutalement $z = a + ib$, et on développe l'équation : $|a - 1 + ib|^2 = 4|a + i(b+1)|^2$, soit $(a-1)^2 + b^2 = 4a^2 + 4(b+1)^2$, donc $a^2 - 2a + 1 + b^2 = 4a^2 + 4b^2 + 8b + 4$. En passant tout à droite et en divisant par 3, on obtient $a^2 + b^2 + \dfrac{2}{3}a + \dfrac{8}{3}b + 1 = 0$. On reconnait une équation de cercle, qu'on met sous la forme habituelle : $\left(a + \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{9} + \left(b + \dfrac{4}{3}\right)^2 - \dfrac{16}{9} + 1 = 0$, soit encore $\left(a + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(b + \dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$. Il s'agit donc d'un cercle de centre $C\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}i\right)$ et de rayon $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Une illustration ci-dessous, on a indiqué en plus les distances du point $D\left(-1 - \dfrac{2}{3}i\right)$ (qui appartient au cercle solution) aux deux points A et B. On a normalement $DA = 2DB$.



2. Le nombre $\dfrac{z-1}{z+i}$ donc être imaginaire pur « positif » (en effet, l'angle est indiqué modulo 2π, il faut donc que la partie imaginaire de notre imaginaire pur soit positive). En posant encore une fois $z = a + ib$, on calcule donc $\dfrac{z-1}{z+i} = \dfrac{a-1+ib}{a+i(1+b)} = \dfrac{(a-1+ib)(a-i(1+b))}{a^2+(b+1)^2}$. En oubliant le dénominateur qui est un réel strictement positif, notre nombre est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, donc si $a^2 - a + b + b^2 = 0$. On reconnait à nouveau une équation de cercle : $\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + \left(b + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0$, c'est-à-dire le cercle de centre $I\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. En fait, on constate aisément qu'il s'agit du cercle dont le centre I est le milieu du segment $[AB]$, et le rayon la moitié de la distance AB, autrement dit du cercle de diamètre $[AB]$. Ce qui n'a rien de surprenant si on se rappelle de certains théorèmes de géométrie vus au collège : un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle AMB est un triangle rectangle en M. Revenons à notre deuxième condition : la partie imaginaire de $\dfrac{z-1}{z+i}$ est positive si $-a - ab + 1 + b + ab \geqslant 0$, soit $b \geqslant a + 1$. Ceci revient à dire que le point d'affixe z doit être situé dans le plan complexe au-dessus de la droite d'équation $y = x + 1$, qui n'est en fait autre que la droite (AB). On obtient finalement un demi-cercle de solutions (si on veut être très rigoureux, on doit éliminer les points A et B, qui sont les extrémités de ce demi-cercle et ne peuvent pas être considérés comme solutions du problème initial).

3. (a) On commence bien sûr par effectuer le changement de variable $Z = z^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2 - (3+8i)Z - 16 + 12i = 0$. Calculons le discriminant de cette équation : $\Delta = (3+8i)^2 - 4(-16+12i) = 9 + 48i - 64 + 64 - 48i = 9$. Coup de chance, le discriminant étant réel, on n'a pas besoin de calcul supplémentaires pour déterminer les solutions de l'équation : $Z_1 = \dfrac{3+8i-3}{2} = 4i$, et $Z_2 = \dfrac{3+8i+3}{2} = 3+4i$. Il reste à calculer les racines carrées de ces deux nombres pour retrouver les solutions de l'équation initiale. Inutile de beaucoup se fatiguer pour Z_1, on peut écrire $Z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ et en déduire immédiatement que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ est une de ces racines carrées. La deuxième est bien entendu son opposé $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Pour Z_2, on revient à la méthode habituelle en posant $z = a + ib$ et en écrivant que $z^2 = 3 + 4i$ si et seulement si $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$. On ajoute comme toujours à ces deux équations la condition sur le module $|z|^2 = a^2 + b^2 = |Z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. En ajoutant et soustrayant les équations extrêmes (comme d'habitude, quoi), on trouve $2a^2 = 8$, donc $a = \pm 2$; et $2b^2 = 2$, donc

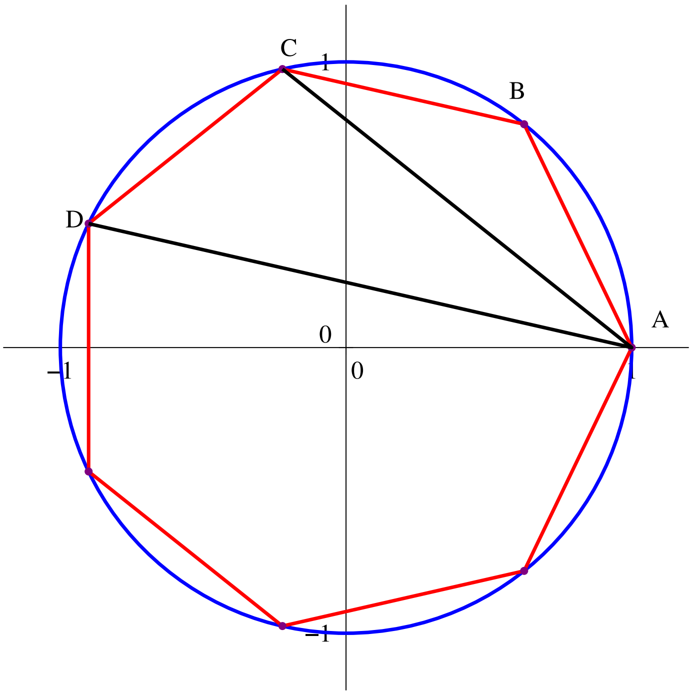
$b = \pm 1$. Comme a et b doivent être de même signe pour satisfaire la troisième équation $2ab = 4$, on garde donc les racines $z_3 = 2 + i$ et $z_4 = -2 - i$. L'équation initiale du quatrième degré admet donc quatre solutions : $\mathcal{S} = \{\sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, 2 = i, 2 - i\}$.

(b) Deux possibilités pour simplifier cette équation de degré 3 : soit on se rend compte que $z = -i$ est racine évidente, soit on ne s'en rend pas compte mais on sait factoriser des différences de cubes : $z^3 - i = z^3 - (-i)^3 = (z + i)(z^2 - iz - 1)$, l'équation dévient alors $(z + i)(z^2 - iz - 7) = 0$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = -1 + 28 = 27$, et admet donc pour racines $z_1 = \dfrac{i + 3\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{i - 3\sqrt{3}}{2}$. Il y a donc trois solutions à l'équation initiale : $\mathcal{S} = \left\{-i, \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}$.

(c) Cette équation revient à dire que $z^4 = 2\,\mathrm{Re}(z)$. En particulier, z^4 est un nombre réel, ce qui implique $\arg(z^4) \equiv 0[\pi]$, donc $4\arg(z) \equiv 0[\pi]$, et $\arg(z) \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$. Distinguons plusieurs cas, en commençant par $z = a \in \mathbb{R}$ (ce qui revient, modulo 2π, à avoir un argument égal à 0 ou à π). L'équation devient alors $a^4 = 2a$, soit $a(a^3?2) = 0$, ce qui nous donne comme premières solutions $a = 0$ et $a = \sqrt[3]{2}$. Passons maintenant au cas où $z = bi \in i\mathbb{R}$ (argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$), ce qui nous ramène à l'équation $b^4 = 0$, qui n'a donc pas d'autre solution que $z = 0$ qu'on avait déjà obtenue. Cas suivant, quand $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = c(1 + i) = c + ci$, avec $c \in \mathbb{R}$. On a alors $z^4 = c^4(1 + i)^4 = c^4(2i)^2 =?4c^4$. On est donc ramenés à l'équation $-4c^4 = 2c$, soit $2c(1 + 2c^3) = 0$. On retrouve logiquement encore une fois la solution nulle, ainsi que $c = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$, soit encore $z = \dfrac{-1 - i}{\sqrt[3]{2}}$. Dernier cas très similaire pour la route : si $\arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = d(1 - i)$. On trouve alors $z^4 = d^4(1 - i)^4 = d^4(-2i)^2 = -4d^4$. Même conclusion que tout à l'heure, on trouve $z = \dfrac{-1 + i}{\sqrt[3]{2}}$. On a fini le tour, il y a donc quatre solutions au total.

4. Supposons donc que le triangle ABC est équilatéral direct, et rappelons que les racines cubines 1, j et j^2 vérifient l'égalité $1 + j + j^2 = 0$. Le triangle est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ (en effet, cela revient à dire que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$), ou encore $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + a(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) = 0$. Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, donc $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = -1 - j^2 = j$. On trouve donc la première condition équivalente $c + j^2b + ja = 0$. Bien entendu, en multipliant par j ou j^2, on trouve les conditions symétriques $jc + b + j^2a = 0$ et $j^2c + jb + a = 0$ (en utilisant que $j^3 = 1$). Si le triangle est équilatéral indirect, on aurait de même (en inversant le rôle de b et de c) les conditions $a + jc + j^2b = ja + j^2c + b = j^2a + c + jb = 0$.

5. Il suffit de prouver la formule pour un heptagone régulier particulier, et elle sera vraie pour tous les autres (au pire, toutes les distances seront multipliées par une même constante, ce qui ne change rien). Tant qu'à faire, prenons un heptagone régulier qu'on connait bien, celui formé par les racines septièmes de l'unité dans le plan complexe. Quitte à décider de renommer les points, on peut choisir $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $z_C = e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $z_D = e^{i\frac{6\pi}{7}}$:



Il faut alors calculer les distances entre ces points en utilisant l'astuce classique de la factorisation par l'angle moitié : $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\frac{2\pi}{7}} - 1| = |e^{i\frac{\pi}{7}}(e^{i\frac{\pi}{7}} - e^{-i\frac{\pi}{7}})| = \left|2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ (on a au passage fait disparaitre le i et le $e^{i\frac{\pi}{7}}$ à l'intérieur des modules puisque ces deux nombres ont un module égal à 1). Un calcul identique prouve que $AC = 2\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et que $AD = 2\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$. Prouver que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ revient alors (quitte à tout mettre au même dénominateur) à montrer que $AC \times AD - AB \times AD - AB \times AC = 0$, soit $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 0$. En appliquant des transformations somme-produit à chacun de ces trois termes (et en simplifiant par 2 en passant), notre égalité est donc équivalente à $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 0$, ce qui est bien vrai puisque $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$, et $\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Maintenant, vous me refaites une démonstration purement géométrique de ce fascinant résultat.