AP : Séance n$^{\text{o}}$ 4

PTSI B Lycée Eiffel

16 octobre 2020

Petits exercices et calculs variés

1. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{2i-1}{j}$.
2. Prouver que, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$. En déduire la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.
5. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ (on admettra sans le vérifier que $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$).

Du classique sur les sommes

On cherche dans cet exercice à trouver une belle formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+5)}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+2)(k+5)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{k+5}$.
2. En déduire la valeur de la somme demandée.
3. Redémontrer la formule précédente par récurrence.

Un peu de trigo ça ne peut pas faire de mal

Les deux questions sont complètement indépendantes :

1. Résoudre l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$ de deux manières différentes.

   Comme vous êtes courageux, résoudre aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \sin(kx) = 0$.
2. Démontrer de deux façons différentes que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \dfrac{\pi}{2}$.