AP n^o 11

PTSI B Lycée Eiffel

7 mai 2021

Exercice 0

Quelques petits calculs pour s'échauffer :

1. Calculer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan^2(x)$ de deux façons : en élevant au carré celui de la fonction tangente, puis en exploitant la dérivée de cette même fonction tangente.
2. La famille $((2,1,-1);(-2,2,1);(2,4,-1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (méthode au choix).
4. Calculer la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.
5. Retrouver le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction arcsin en exploitant le fait qu'elle est réciproque de la fonction sin (et qu'on connait le DL de cette dernière, bien entendu).
6. Étudier la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ (limite, présence d'une éventuelle asymptote oblique, et position relative de la courbe par rapport à cette asymptote).
7. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 1

On définit dans $E = \mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants : $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t = x-2y+2z+t = x-y+z = 0\}$; $G = \mathrm{Vect}((1,1,-1,1);(-1,-2,3,7);(4,4,-5,-3))$.

1. Déterminer une base de F et préciser la dimension de ce sous-espace vectoriel.
2. Compléter la base obtenue pour F en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. La famille $((1,1,-1,1);(-1,-2,3,7);(4,4,-5,-3))$ est-elle une famille libre de vecteurs de E ? En déduire la dimension de G.
4. On note $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+6y+7z-t = 0\}$. Vérifier que $H = G$.
5. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
6. Soit $u(x,y,z,t)$ un vecteur quelconque de E. Exprimer u comme somme de deux vecteurs v et w appartenant respectivement à F et à G.

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et on note $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que la famille (A, A^2) est une famille libre de E.

2. Calculer A^3 et vérifier que la famille (A, A^2, A^3) est une famille liée de E.
3. On note F l'ensemble des matrices de E commutant avec la matrice A. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer sa dimension et une base de F.
4. Montrer que $F = \text{Vect}(I_2, A)$ et que $F = \text{Vect}(A, A^2)$. Donner les coordonnées de la matrice I_2 dans la base (A, A^2) de F.
5. On note G l'ensemble des matrices de E commutant avec la matrice A^2. Déterminer une base et la dimension de G, puis vérifier que $G = F$.

Exercice 3

On cherche dans cet exercice à obtenir un développement asymptotique d'une suite de réels (u_n) solutions de l'équation $\tan(u_n) = u_n$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On notera u_n cette solution. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier que $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. On pose $v_n = u_n - n\pi$. Montrer rigoureusement que $v_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$ (on pourra exploiter sans la démontrer la relation $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$).
3. Déterminer la limite de la suite (v_n), et en déduire un développement asymptotique de u_n de la forme $u_n = n\pi + k + o(1)$, avec $k \in \mathbb{R}$.
4. Calculer un développement asymptotique de $\frac{1}{u_n}$ à l'ordre $\frac{1}{n^2}$, et en déduire les développements asymptotiques de v_n puis de u_n à ce même ordre.
5. En adaptant la méthode exploitée à la question précédente, obtenir un développement asymptotique de u_n à l'ordre $\frac{1}{n^3}$.