AP n° 10

PTSI B Lycée Eiffel

26 mars 2021

Petits exercices indépendants sur les espaces vectoriels.

1. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $F = \{P \in E \mid P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\ dt = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en donner une base et préciser sa dimension.
2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on note $F = \mathrm{Vect}((3,7,1,-5);(-1,3,3,1))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,5,2,-2);(2,2,-1,-3))$. Montrer que $F = G$.
3. On note, pour tout entier naturel k, $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, pour tout entier n.
4. Dans $\mathbb{R}^4$, préciser les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $\mathcal{F} = ((1,0,0,1), (-1,1,2,-2), (\alpha,2,1,1), (2,-1,1,1))$ est une base. Dans ce cas, donner les coordonnées du vecteur $(1,2,-1,1)$ dans cette base.
5. On note E l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que les ensembles $F = \{f \in E \mid f \text{ est paire}\}$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ est impaire}\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Utiliser ce résultat pour résoudre l'équation $f''(x) + f(-x) = x$.

Le jeu du sous-espace vectoriel, le retour de la vengeance !

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser pour chacune des conditions suivantes si l'ensemble des matrices la vérifiant est ou non un sous-espace vectoriel de E. Essayer de donner la dimension du sous-espace vectoriel le cas échéant, quand $n = 3$.

1. M a une première ligne entièrement nulle.
2. M admet au moins un coefficient nul.
3. Tous les coefficients de M sont égaux.
4. $M^2 = I$.
5. $MA = 0$, où A est une matrice fixée de E.
6. ${}^tM = 2M$.
7. ${}^tM = 2M + I$.
8. $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, où P est une matrice inversible fixée de E.

Exercice

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on note $G = \mathrm{Vect}((1,-1,2,-2),(4,0,1,-5),(3,1,-1,-3))$, et $F = \{(x,y,z,t) \mid x + y = x - y + z + 2t = 0\}$.

1. Déterminer la dimension de G.
2. Déterminer la dimension et une base de F.
3. Déterminer les dimensions des sous-espaces $F \cap G$ et $F + G$.
4. Trouver un sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^4$ tel que $(F + G) \oplus H = \mathbb{R}^4$.