Feuille d'exercices n° 6 : Nombres Complexes

PTSI B Lycée Eiffel

20 novembre 2018

Vrai/Faux

1. On a toujours $|z - z'| \leqslant |z| - |z'|$.
2. Quels que soient les nombres complexes z et z', on a $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.
3. Tout nombre complexe admet exactement deux racines carrées.
4. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est donné par $u.v = \Re(\overline{z_u} z_v)$.
5. Une isométrie directe du plan complexe peut s'écrire sous la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et/ou trigonométrique.

- $z = (1 + 2i)^3$
- $z = \dfrac{4}{1 - i}$
- $z = (2 + i)^2 \times \dfrac{1 - i}{4 + i}$
- $z = e^{-i\frac{37\pi}{4}}$
- $z = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $z = (1 - i\sqrt{3})^{11}$
- $z = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^5$
- $z = \left(\dfrac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i}\right)^{17}$
- $z = e^{(1+i)\ln(3)}$

Exercice 2 (**)

Pour chacun des problèmes indépendants suivants, on essaira de faire deux résolutions : l'une par le calcul, l'autre géométrique.

1. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, $\dfrac{1}{z}$ et $1 - z$ ont même module.
2. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, z^2 et z^4 ont des images alignées dans le plan complexe.
3. Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z| = |z - 4|$ et $\arg(z) = \arg(z + 1 + i)$.
4. Trouver tous les nombres complexes z pour lequels les images de z, i et iz forment un triangle équilatéral dans le plan complexe.

Exercice 3 (* à ***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$
2. $iz^2 + (2 - 3i)z + 5i - 5 = 0$
3. $2z^2 + iz + 1 - i = 0$
4. $z^2 = -\overline{z}^2$
5. $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$
6. $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0$
7. $z^4 = 24i - 7$

8. $\overline{z} = z^n$
9. $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$ (cette équation admet une racine réelle)
10. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

Exercice 4 (**)

On considère l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$.

1. Résoudre cette équation de façon bourrine en développant tout.
2. Résoudre cette même équation de façon subtile en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 5 (**)

Si p et q sont deux entiers naturels distincts, à quoi ressemble $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$?

Exercice 6 (*)

Linéariser les expressions suivantes : $\cos^6(x)$; $\sin^2(x)\cos^3(x)$; $\cos(x)\sin^5(x)$.

Exprimer $\cos(5x)\sin^2(3x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$; exprimer $\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)+\sin(8x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 7 (***)

Simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$.

Exercice 8 (* à **)

Démontrer les propriétés suivantes (questions indépendantes) :

1. Pour tous nombres complexes u et v, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ (identité du parallélogramme).
2. Si $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$, alors $\dfrac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.
3. Si $|z| = 1$, on a soit $|1+z| \geqslant 1$, soit $|1+z^2| \geqslant 1$. Peut-on avoir les deux simultanément ?

Exercice 9 (* à **)

Donner toutes les formes possibles de l'équation des cercles suivants (forme complexe factorisée $|z-a| = r$; forme complexe développée $z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + b = 0$; forme cartésienne factorisée $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; et forme cartésienne développée $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$). Préciser si nécessaire le centre et le rayon du cercle.

- cercle de centre $A(2-i)$ et de rayon 3
- cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(-1+2i)$ et $B(3+4i)$
- cercle d'équation complexe développée $z\overline{z} + iz - i\overline{z} - 3 = 0$
- cercle d'équation cartésienne développée $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 9 = 0$
- cercle passant par les points $A(1-i)$, $B(-1-i)$ et $C(5i)$
- cercle tangent aux axes réel et imaginaire, et passant par le point $A(6+7i)$

Exercice 10 (* à ***)

On considère dans le plan complexe les points $A(-3+i)$; $B(1-2i)$; $C(1+3i)$ et $D(2+2i)$. Déterminer l'affixe de chacun des objets géométriques suivants :

1. milieu du segment $[BC]$
2. vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
3. point d'intersection des droites (AC) et (BD)
4. barycentre du système $((B,1);(C,-2),(D,2))$
5. vecteur directeur (normé) de la droite (CD), vecteur normal (normé) à la droite (AB)
6. points d'intersection du cercle de diamètre $[AD]$ et de la droite (BC)
7. centre de gravité, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit du triangle ABD

Exercice 11 (* à **)

Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations géométriques suivantes.

- translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3-2i)$
- rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$
- rotation de centre $A(1-2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
- symétrie par rapport à la droite d'équation cartésienne $y = x$
- symétrie par rapport au point $B(3i)$
- homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$ et de centre $C(-2+i)$
- composée de ces deux dernières transformations

Inversement, caractériser géométriquement chacune des applications complexes suivantes.

- $f(z) = \overline{z} - 3$
- $f(z) = (1-i)z + 2i - 1$
- $f(z) = 2\overline{z}$
- $f(z) = 3z - 4i + 2$
- $f(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
- $f(z) = -i\overline{z} + 2i - 1$

Exercice 12 (**)

On considère l'application du plan complexe dans lui-même $f : z \mapsto z^2 + z + 1$.

1. Déterminer les images par f des nombres 1, $2i - 5$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Déterminer les antécedents par f de $1 + i$.
3. Déterminer les nombres complexes invariants par f.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes ayant une image réelle par f.
5. Déterminer le lieu des points M alignés avec leur image par f et avec 1.

Exercice 13 (**)

On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z^2}{z-2i}$.

1. Déterminer les antécédents éventuels de $1 + i$ par f.
2. Pour un nombre complexe w quelconque, déterminer suivant la valeur de w son nombre d'antécédents par f.
3. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective sur son ensemble de définition ?

Exercice 14 (**)

On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$, et on note $A = \mathbb{C}\backslash\{2\}$ et $B = \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de A vers B. Déterminer une expression simple de sa réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$) et celle du disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.
3. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{U}$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. Quel est l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$? Est-elle également bijective, et si oui, vers quel ensemble ?

Exercice 15 (***)

On considère dans cet exercice l'application définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même, et déterminer son application réciproque f^{-1}.
2. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $\mathrm{Re}\,(f(z)) > 0$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Montrer sur un exemple que l'application f ne conserve pas les milieux (autrement dit que l'image par f du milieu d'un segment $[AB]$ n'est pas toujours le milieu du segment $[f(A)f(B)]$).
4. Déterminer l'image par f de l'axe réel et de l'axe imaginaire.
5. Montrer plus généralement que l'image par f d'une droite passant par l'origine est toujours une droite passant par l'origine (mais privée du point O).
6. On considère désormais la droite passant par les points $A(1)$ et $B(i)$. Montrer que l'image de tout point de cette droite appartient à un cercle de centre $C\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$. Réciproquement, déterminer les points de ce cercle ayant un antécédent par f sur la droite (AB).
7. Généraliser en déterminant l'image d'une droite quelconque du plan complexe (ne passant pas par l'origine).
8. Quelle est l'image par f d'un cercle passant par l'origine ?
9. Déterminer l'image par f du cercle trigonométrique, puis plus généralement celle du cercle de centre O et de rayon r.
10. Déterminer enfin l'image d'un cercle ne passant pas par l'origine et n'étant pas centré en O.

Exercice 16 (****)

On souhaite colorier tout le plan complexe à l'aide de trois couleurs, par exemple le bleu, le rouge et le vert (qui revient en fait à définir une fonction ayant pour ensemble de départ $\mathbb{C}$ et pour ensemble d'arrivée l'ensemble à trois éléments {bleu ; rouge ; vert}). Peut-on effectuer ce coloriage de façon à ce que deux points du plan complexe situés à distance 1 l'un de l'autre soient toujours de couleur différente ?

Problème 1 : étude d'une application complexe (**)

On considère dans cet exercice l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z(1-z)$. On identifiera cette application à une application du plan muni d'un repère orthonormé dans lui-même, en notant, si M est l'image du nombre complexe z dans le plan, $f(M)$ l'image du nombre complexe $2z(1-z)$

1. (a) Déterminer les points invariants par f, c'est-à-dire les points M vérifiant $f(M) = M$.
   (b) Déterminer les antécédents par f de -4, puis ceux de $2 + 2i$.
2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2 pour que $f(z_1) = f(z_2)$. Interpréter cette condition géométriquement. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer l'ensemble des points du plan ayant un antécédent par f, puis ceux ayant un unique antécédent par f. L'application est-elle surjective ?
4. On note D l'axe des abscisses dans le plan.
   (a) Déterminer l'image par f de la droite D.
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple sur z pour que $f(z)$ soit un nombre réel. En déduire l'image réciproque de D par f.
5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan.
   (a) En notant $z = e^{i\theta}$ un nombre complexe dont l'image est sur $\mathcal{C}$, déterminer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de θ.
   (b) Représenter dans le plan les images $f(z)$ lorsque $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}$ (on effectuera évidemment les calculs nécessaires sur la copie). En déduire une allure de l'image du demi-cercle trigonométrique supérieur par f (on admettra que les tangentes à cette image sont verticales aux points correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$).
   (c) Comment peut-on déduire très simplement de la courbe précédente l'image du demi-cercle trigonométrique inférieur par f ?
   (d) Tracer l'allure de l'image complète par f de $\mathcal{C}$.

Problème 2 : résolution d'équations du troisième degré (***)

Le but de cet exercice est de présenter une méthode de résolution (faisant intervenir les nombres complexes) des équations du troisième degré.

I. Un cas particulier

On s'intéresse pour l'instant à l'équation $z^3 - 6z^2 + 9z - 1 = 0$.

1. On pose $Z = z - 2$, déterminer une équation du troisième degré vérifiée par Z.
2. On décide désormais d'écrire $Z = u+v$, développer l'équation obtenue à la question précédente et prouver que $u^3 + v^3 + 3(uv - 1)(u + v) + 1 = 0$.
3. En imposant la condition $uv = 1$, montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$.
4. Résoudre cette équation, et en déduire les valeurs possibles de u et de v.
5. Déterminer les solutions de l'équation initiale.

II. Généralisation

On considère désormais une équation du troisième degré quelconque $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

1. Montrer, qu'en faisant un changement de variable du type $Z = z + k$, on peut se ramener à une équation de la forme $Z^3 + pZ + q = 0$.
2. En posant $Z = u + v$ et $uv = -\frac{p}{3}$, montrer que l'équation se ramène à $u^3 + v^3 + q = 0$.
3. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$, déterminer les valeurs de $U + V$ et de UV.
4. En déduire les valeurs de U et V, et expliquer comment terminer la résolution de l'équation du troisième degré initiale.
5. Résoudre à l'aide de cette méthode l'équation $z^3 - 3z^2 + (9 - 6i)z + (-5 + 12i)$.

Problème 3 : homographies du plan complexe (***)

Une homographie est une application du plan complexe dans lui-même définie par une équation de la forme $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c et d sont quatre nombres complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

I. Un cas particulier

On étudie dans cette première partie l'application $f : z \mapsto \dfrac{iz-1}{z+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et montrer que f est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un ensemble à déterminer, en déterminant une expression de sa réciproque.
2. Déterminer les images par f de 2 et de $1+i$ (sous forme algébrique), ainsi que leurs antécédents.
3. Déterminer les nombres complexes invariants par f.
4. Déterminer les nombres complexes z ayant une image réelle par f, puis ceux ayant une image imaginaire pure.
5. Déterminer les nombres complexes z pour lequels $f(z) \in \mathbb{U}$.
6. Montrer que l'image du demi-plan constitué de tous les nombres complexes ayant une partie imaginaire strictement positive est délimitée par une droite dont on donnera une équation cartésienne.

II. Une étude plus générale

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et f l'homographie définie par $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z) \in \mathbb{U}$.
2. On considère maintenant une homographie de la forme $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z+a}{\overline{a}z+1}$, où a est un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{U}$. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z)$ est bien défini, et $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. On cherche à prouver que seules les deux types d'homographies précédentes conservent le cercle trigonométrique. Soit donc une homographie $f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ telle que $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z) \in \mathbb{U}$.
   (a) Montrer que, si α et β sont deux nombres complexes quelconques, $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{\alpha}\beta)$.
   (b) Établir que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{c}de^{-i\theta})$.
   (c) Montrer que la condition $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha + 2\text{Re}\,(\beta e^{-i\theta}) = 0$ implique $\alpha = \beta = 0$. En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a}b = \overline{c}d$.
   (d) Montrer que, si $a = 0$, f est du type étudié à la première question de cette deuxième partie.
   (e) Montrer que, si $a \neq 0$, $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$.
   (f) Montrer que le premier cas est impossible, et prouver que f est alors du type étudié dans la deuxième question de cette partie.