TD n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

PTSI Lycée Eiffel

23 mai 2019

Exercice 1

A. Calcul matriciel.

1. Un calcul trivial donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, soit effectivement $A^3 = 2A$.

2. Puisque A est la matrice représentative de f dans la base canonique, on a $f(x,y,z) = (y, x+z, y)$. On en déduit que $u(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow y = z + x = 0$, soit $y = 0$ et $z = -x$. Autrement dit, $\ker(f) = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1))$. L'unique vecteur $(1, 0, -1)$ constitue bien entendu une base de ce noyau puisqu'il est non nul.

   Effectuons un calcul similaire pour le second noyau, en résolvant le système
   $\left\{ \begin{array}{ccccc} & & y & & = & \sqrt{2}x \\ x & + & & z & = & \sqrt{2}y \\ & & y & & = & \sqrt{2}z \end{array} \right.$. Ce système se résout tout seul : $x = z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$, et l'équation du milieu est alors automatiquement vérifiée. Autrement dit, $\ker(f - \sqrt{2}\,id) = \{(x, \sqrt{2}x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$, et l'unique vecteur $(1, \sqrt{2}, 1)$ constitue encore une fois manifestement une base du noyau.

3. Pour ne pas avoir à faire plusieurs fois les mêmes calculs, on peut anticiper en regardant ce qui est demandé à la question suivante et noter immédiatement P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ (on ne sait pas encore qu'il s'agit d'une base) dans la base canonique, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si cette matrice P est inversible, ce qu'on va vérifier en lui appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

4. On l'a déjà fait à la question précédente : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On l'a déjà fait à la question précédent la question précédente : $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

6. Le but de la question est bien entendu d'utiliser la formule du cours $A' = P^{-1}AP$, où A est la matrice de f dans la base canonique (c'est la définition même de f qui nous le confirme). Il ne reste plus qu'à effectuer le produit matriciel : $AP = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, puis $A' = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$, soit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alternativement, les plus paresseux auront constaté que $f(u) = 0$ (ce qui découle du calcule du noyau de f), $f(v) = \sqrt{2}v$ (découle du calcul du deuxième noyau de la question 2), et $f(w) = -\sqrt{2}w$ (là il faut écrire le calcul), ce qui traduit exactement le fait que la matrice de f dans la base (u, v, w) est diagonale, avec comme coefficients 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sur la diagonale.

B. Étude d'une application linéaire.

1. Par définition (et d'après le calcul de A^2 effectué dans la première partie de l'exercice), $F = \{aI + bA + cA^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(I, A, A^2)$, ce qui suffit à prouver que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I, A, A^2) forme une famille génératrice de F. Or, la famille (I, A, A^2) est également libre : si on suppose que $aI + bA + cA^2 = 0$, avec a, b et c trois réels quelconques, la nullité des trois coefficients sur la première colonne impose $a + c = b = c = 0$, donc $a = b = c = 0$. La famille est donc libre, et il s'agit donc d'une base de F, qui est accessoirement un espace vectoriel de dimension 3.
2. Soit $\forall M \in F$, d'après la question précédente, $M = aI + bA + cA^2$, donc $AM = aA + bA^2 + cA^3$. Or on a prouvé dans la première partie que $A^3 = 2A$, donc $AM = (a + 2c)A + bA^2 \in F$ (puisque cette matrice est combinaison linéaire de deux matrices appartenant à F).
3. (a) On vient de prouver que $AM \in F$ pour toute matrice $M \in F$, ce qui prouve que l'application g est bien définie et à valeurs dans F. Reste à prouver qu'elle est linéaire : si M et N sont deux matrices de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $g(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda g(M) + g(N)$, ce qui prouve la linéarité de g, qui est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel F.

   (b) On a déja plus ou moins calculé plus haut $g(I) = A$, $g(A) = A^2$ et $g(A^2) = A^3 = 2A$, ce qui donne immédiatement pour matrice de g dans la base (I, A, A^2) la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Deux possibilités : soit on procède matriciellement, soit on effectue un calcul direct à partir de la définition de g. Si on choisit cette deuxième option, on calcule $g \circ g(M) = A^2M$, puis $g \circ g \circ g(M) = A^3M = 2AM = 2g(M)$, ce qui prouve bien que $g^3 = 2g$ (l'égalité est vraie quelle que soit la matrice M). Sinon, à l'aide de la matrice calculée à la question précédente, il suffit de vérifier que $B^3 = 2B$ (ce qui est facile) pour conclure.

   (d) D'après la question précédente, on a $g \circ (g^2 - 2\,id) = g^3 - 2g = 0$, ce qui suffit à affirmer que $\text{Im}(g^2 - 2\,id) \subset \ker(g^2)$. En effet (si on ne connait pas ce théorème), si $y \in F$ est un élément de l'image de $g^2 - 2\,id$, cela signifie qu'on peut trouver un x appartenant à F tel que $y = g^2(x) - 2x$, mais alors $g(y) = g^3(x) - 2g(x) = 0$ d'après la question précédente, ce qui prouve que $y \in \ker(g)$, et donc l'inclusion souhaitée.

   (e) Soit $M \in F$, d'après la question 1, on peut écrire que $M = aI + bA + cA^2$, puis que $g(M) = (a+2c)A + bA^2$. Comme (I, A, A^2) forme une base de F, la matrice $g(M)$ est nulle si et seulement si $a + 2c = b = 0$, soit $b = 0$ et $a = -2c$, ou encore si $M = c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(g) = \text{Vect}(A^2 - 2I)$, et l'unique matrice (non nulle) $A^2 - 2I$ forme une base de ce noyau.

   (f) D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(F) = 3$. Or, la question précédente montre que $\dim(\ker(g)) = 1$, donc $\dim(\text{Im}(g)) = 2$.

   (g) On constate aisément que $g(I + A) = A + A^2$, mais rien de nous prouve que c'est la seule matrice pour laquelle l'égalité est vraie. En fait, on sait même que ce n'est pas le cas : $g(M) = A + A^2 \Leftrightarrow g(M) = g(I + A) \Leftrightarrow g(M - I - A) = 0 \Leftrightarrow M - I - A \in \ker(g)$. On a déterminé le noyau de g plus haut, on peut donc conclure que tous les antécédents de $A + A^2$ par l'application g sont les matrices de la forme $M = I + A + c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

I. Étude de la fonction f.

1. La fonction f est définie en x si $1+x>0$ et $x\neq 0$, donc $\mathcal{D}_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

2. Dire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$ revient simplement à dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$. Or, $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}$. Si on veut être très rigoureux, on écrit que $\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^{\frac{3}{2}}}$. Le deuxième quotient a une limite nulle de façon évidente, et pour le premier il s'agit d'une croissance comparée classique. On a bien prouvé la négligeabilité demandée.

3. Il suffit d'aplpiquer le développement limité classique de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 puis de diviser par x : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^2)$.

4. Le développement limité calculé ci-dessus prouve que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc f est bien prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0)=1$.

5. Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction g en 0 est le même que celui de la fonction f. Comme g admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle est nécessairement dérivable en 0. De plus, sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$ (on garde la troncature du développement limité à l'ordre 1), ce qui prouve en passant que $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$. Enfin, $g(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^2) \sim \dfrac{1}{3}x^2 > 0$, donc cette différence est positive au voisinage de 0. Ceci suffit à prouver que la courbe de g est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

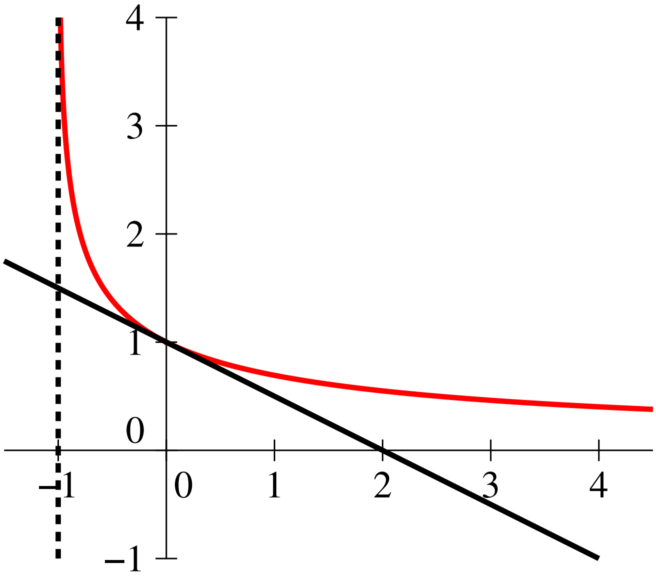
6. On sait déjà que g est continue et dérivable en 0, il reste à vérifier si g' est continue en 0, autrement dit il faut voir si $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\dfrac{1}{2}$. Rappelons en passant que le caractère $\mathcal{C}^1$ est une information qui n'est pas donnée par l'existence d'un développement limité, même à l'ordre 2 (ou plus d'ailleurs). On calcule donc, pour tout x non nul, $g'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ (la dérivabilité de g ailleurs qu'en 0 ne pose aucun problème). Or, d'après les développements limités classiques en 0, on peut écrire $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) = x(1-x+o(x)) - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) = x - x^2 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) = -\dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim -\dfrac{1}{2}x^2$. On en déduit que $g'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\dfrac{1}{2}$, et donc que la fonction g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 (mais aussi sur tout $]-1,+\infty[$ par théorèmes généraux).

7. D'après la question précédente, $g'(x) = \dfrac{k(x)}{x^2(1+x)}$, et g' est donc du signe de k sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ puisque le dénominateur y est toujours positif. Nous allons donc étudier k, qui est définie, dérivable et tout ce qu'on veut sur $]-1,+\infty[$. On calcule $k'(x) = 1 - \dfrac{1+x}{1+x} - \ln(1+x) = -\ln(1+x)$. Cette dérivée est positive sur $]-1,0[$ et négative sur $]0,+\infty[$, la fonction k admet donc en 0 un maximum de valeur $k(0)=0$. Elle est donc toujours négative, ce qui prouve que g est décroissante sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Étant continue en 0, elle est donc en fait décroissante sur $]-1,+\infty[$. Les limites ne posent guère de difficulté : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (croissance comparée très similaire à celle de la question 2), et

$\lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici). On résume tout celà dans le tableau de variations :

x	-1		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

8. Il n'y a pas grand chose de passionnant à tracer, mais n'oublions pas l'étude faite à la question 5 pour produire une courbe cohérente :



9. Sans essayer d'être extrêmement rigoureux, constatons que le prolongement par continuité effectué en 0 rend la fonction g continue sur $]-1, +\infty[$, et strictement monotone sur cet intervalle. Elle y est donc bijective, à valeurs dans $]0, +\infty[$ d'après les limites calculées plus haut.

10. On a calculé plus haut le développement limité de g : $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$. En admettant que la réciproque g^{-1} admet elle aussi un développement limité à l'ordre 2 en 1, on pourra donc écrire $g^{-1}(1+h) = a + bh + ch^2 + o(h^2)$, en posant $h = x - 1$ (qui a bien sûr une limite nulle lorsque x tend vers 1). Exploitons maintenant le fait que $g^{-1}(g(x)) = x$, et remplaçons $g(x)$ par son développement limité : $g^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) = x$. En posant $h = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$ (qui a bien une limite nulle), on peut alors écrire $a + b\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) + c\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) = x$, soit en développant tout $a - \frac{b}{2}x + \frac{b}{3}x^2 + \frac{c}{4}x^2 + o(x^2) = x$ (on a éliminé les termes inutiles d'ordre plus grand que x^2). Par unicité du développement limité de la fonction identité, on peut identifier les coefficients du membre de gauche avec ceux à droite pour obtenir les conditions $a = 0$ (sans surprise puisque $g(0) = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = 0$), $-\frac{b}{2} = 1$, donc $b = -2$; et enfin $\frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0$, soit $c = -\frac{4}{3}b = \frac{8}{3}$.

Autrement dit, le développement limité à l'ordre 2 en 1 de g^{-1} est $g^{-1}(h) = -2h + \frac{8}{3}h^2 + o(h^2)$, soit $g^{-1}(x) \lim_{x \to 1} - 2(x-1) + \frac{8}{3}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

II. Étude d'une suite récurrente.

1. Posons $h : x \mapsto f(x) - x$. La fonction f étant décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, h le sera aussi. Elle est par ailleurs évidemment continue, et comme $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2(\ln(3) - \ln(2)) - \frac{1}{2} > 0$ (en effet, $\ln(3) - \ln(2) > \frac{1}{4}$), et $h(1) = \ln(2) - 1 < 0$, la fonction h effectue donc une bijection de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ vers $\left[\ln(2) - 1, 2(\ln(3) - \ln(2)) - \frac{1}{2}\right]$, intervalle qui contient 0. On en déduit que 0 admet un unique antécédent par h dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, ce qui revient exactement à dire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur cet intervalle (et ailleurs aussi, d'ailleurs).

2. (a) C'est une récurrence facile à partir du moment où on a prouvé que l'intervalle était stable par f. On sait déjà que f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, de plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(\ln(3) - \ln(2)) \simeq 0.8 < 1$, et $f(1) = \ln(2) > \frac{1}{2}$, donc on a bien $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Prouvons maintenant par récurrence que $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$: c'est vrai au rang 0 par hypothèse puisque $u_0 = 1$, et si $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors d'après le calcul précédent, $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, ce qui prouve l'hérédité et achève notre récurrence.

   (b) La dérivée f' est donc strictement croissante (puisqu'on nous le dit), mais elle est aussi négative. La plus grande valeur prise par $|f'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est donc $\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{\frac{1/2}{3/2} - \ln(\frac{3}{2})}{\frac{1}{4}}\right| = 4\left(\ln(3) - \ln(2) - \frac{1}{3}\right)$. Avec les arrondis donnés, on sait que $\ln(3) - \ln(2) \simeq 0.4$, donc $\ln(3) - \ln(2) - \frac{1}{3} < \frac{1}{10}$, ce qui suffit à conclure que la valeur maximale qu'on vient de calculer est bien inférieure à 0.4.

   (c) Il s'agit bien sûr d'appliquer l'inégalité des accroissements finis, donc on prend le temps de bien vérifier toutes les hypothèses : la fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, sa dérivée est majorée par 0.4 en valeur absolue sur cet intervalle, et les réels α et u_n appartiennent tous les deux à l'intervalle (tout celà a été prouvé plus haut). On peut donc écrire, d'après l'IAF, que $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant 0.4|u_n - \alpha|$. Or, par définition, $f(u_n) = u_{n+1}$, et $f(\alpha) = \alpha$, ce qui permet d'aboutir à la majoration souhaitée : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.4|u_n - \alpha|$.

   (d) Procédons par récurrence : au rang 0, on a $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ puisque $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Si on suppose l'inégalité vérifiée au rang n, il suffit de la multiplier par 0.4 pout obtenir

$0.4|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} \times 0.4^{n+1}$, qui implique $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} \times 0.4^{n+1}$ d'après la question précédente. L'hérédité est donc prouvée, et la récurrence fonctionne.

On peut donc écrire $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} \times 0.4^n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \times 0.4^n = 0$ (limite de suite géométrique). Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

(e) D'après le résultat de la question d, u_n est certainement une valeur approchée de α à 10^{-2} près si $\dfrac{1}{2} \times 0.4^n \leqslant 10^2$, soit $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \leqslant 2.10^{-2}$, ou encore $\left(\dfrac{5}{2}\right)^n \geqslant 50$ en passant à l'inverse. Puisqu'on ne demande pas un calcul exact, passons au logarithme : $n(\ln(5) - \ln(2)) \geqslant \ln(50)$ est certainement vérifié lorsque $n_0 = Ent\left(\dfrac{\ln(50)}{\ln(5) - \ln(2)}\right) + 1$.

III. Dérivées successives de la fonction f.

1. La fonction dérivée f' étant quotient de deux fonctions manifestement dérivables et ne s'annnulant pas sur $]0, +\infty[$ (pour le dénominateur), la fonction f' est dérivable sur cet intervalle, et f y est donc deux fois dérivable. De plus, en repartant de l'expression $f'(x) = \dfrac{k(x)}{(1+x)x^2} = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, on calcule $f''(x) = -\dfrac{1+2x}{x^2(1+x)^2} - \dfrac{\frac{x^2}{1+x} - 2x\ln(1+x)}{x^4} = -\dfrac{1+2x+1+x}{x^2(1+x)^2} + \dfrac{2\ln(1+x)}{x^3} = \dfrac{2\ln(x)}{(1+x)^3} - \dfrac{2+3x}{x^2(1+x)^2}$. Remarquons en anticipant un peu sur la question suivante qu'on obtient bien la forme souhaitée, avec $T_2 = -2 - 3X$.
2. On va bien entendu procéder par récurrence. Au rang 0, la propriété est vraie en posant $T_0 = 0$ et $a_0 = 1$. Supposons la propriété vraie au rang n, alors la fonction $f^{(n)}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables (et le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$), et $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{T_n'(x)x^n(1+x)^n - nx^{n-1}(1+x)^n T_n(x) - nx^n(1+x)^{n-1}T_n(x)}{x^{2n}(1+x)^{2n}} + \dfrac{a_n}{(1+x)x^{n+1}} - a_n\dfrac{(n+1)\ln(1+x)}{x^{n+2}}$ (le deuxième quotient a été dérivé comme un produit pour simplifier le calcul). Après regroupement et mise au même dénominateur, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{x(1+x)T_n'(x) - n(1+2x)T_n(x) + (1+x)^n a_n}{x^{n+1}(1+x)^{n+1}} - (n+1)a_n\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$. Cette expression peut s'écrire $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{T_{n+1}(x)}{x^{n+1}(1+x)^{n+1}} + a_{n+1}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$, en posant simplement $T_{n+1} = x(1+x)T_n'(x) - n(1+2x)T_n(x) + (1+x)^n a_n$ (qui est bien un polynôme sous l'hypothèse que T_n en est un puisqu'il est obtenu par produit et somme de polynômes), et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ (qui est toujours un nombre entier, mais l'énoncé ne le demandait pas). On a prouvé la propriété au rang $n+1$, la récurrence est achevée.
3. D'après la question précédente, la suite (a_n) est définie par la condition initiale $a_0 = 1$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = -(n+1)a_n$. Si on ne voit pas tout de suite ce que ça va donner (ce n'est pas à proprement parler une suite classique), on calcule quelques termes : $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -6$, $a_4 = 24$, et on conjecture facilement que $a_n = (-1)^n n!$. Il ne reste plus qu'à le prouver par récurrence : $(-1)^0 \times 0! = 1 \times 1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0, et si on la suppose vérifiée au rang n, alors $a_{n+1} = -(n+1) \times (-1)^n n! = (-1)^{n+1}(n+1)!$, ce qui prouve l'hérédité.

4. (a) On va là aussi procéder par conjecture puis preuve par récurrence. Commençons peut-être par la fonction v : v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $v''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $v'''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$. On peut imaginer la formule $v^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. On la prouve par récurrence : au rang 0 (pour cette fonction, ça ne pose pas de problème d'inclure $k=0$ dans la récurrence), $\dfrac{(-1)^0 0!}{x^1} = \dfrac{1}{x}$, ça marche. Supposons la formule vraie au rang n, alors $v^{(n+1)}(x) = -\dfrac{(-1)^n n! \times (n+1)}{x^{n+2}} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$, ce qui achève la récurrence.
Passons à la fonction u, qui est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et calculons $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $u''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $u'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, $u^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(1+x)^4}$. En excluant le cas particulier $k=0$, on conjecture $u^{(k)}(x) = \dfrac{(-1^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, ce qu'on prouve par une récurrence essentiellement identique à la précédente, sauf qu'on initiale pour $k=1$: $\dfrac{(-1^0 0!}{(1+x)^1} = \dfrac{1}{1+x} = u'(x)$.

(b) Puisque $f = u \times v$, on peut appliquer la formule de Leibniz pour obtenir une expression de $f^{(n)}$ sous forme de somme : $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$. En reprenant les formules démontrées à la question précédente et en isolant le terme correspondant à $k=0$, $f^{(n)}(x) = \ln(1+x) \times \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \times \dfrac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}}$
$= \dfrac{(-1)^n n! \ln(1+x)}{x^{n+1}} + \dfrac{1}{x^n(1+x)^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-1}(k-1)!(n-k)!(1+x)^{n-k}x^{k-1}$. En constantant que $\dbinom{n}{k}(k-1)!(n-k)! = \dfrac{n!(k-1)!(n-k)!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k}$, et en identifiant avec la formule générale démontrée à la question 2, on constate que $T_n(x) = (-1)^{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k} x^{k-1}(1+x)^{n-k}$.
Application numérique lorsque $n=2$: $T_2(x) = -(2x^0(1+x)^1 + x^1(1+x)^0) = -(2+2x+x) = -2-3x$, ce qui correspond bien à la dérivée seconde calculée en début de partie.