TD n° 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 mars 2019

Pour s'échauffer

1. Le polynôme dérivé $P' = 3X^2 - 2X - \dfrac{39}{4}$ admet pour discriminant $\Delta = 4 + 3 \times 39 = 121 = 11^2$, et pour racines $X_1 = \dfrac{2-11}{6} = -\dfrac{3}{2}$ et $X_2 = \dfrac{2+11}{6} = \dfrac{13}{6}$. On va plutôt tester la première pour commencer : $P\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{27}{8} - \dfrac{9}{4} + \dfrac{117}{8} - 9 = \dfrac{-27 - 18 + 117 - 72}{8} = 0$, donc $-\dfrac{3}{2}$ est bien notre racine double. Le polynôme P étant de degré 3, il admet une autre racine qu'on peut déterminer à l'aide des relations coefficients-racines : la somme des trois racines (en comptant deux fois la racine double) est égale à $-(-1) = 1$, donc la troisième racine vaut $1 + 2 \times \dfrac{3}{2} = 4$, et le polynôme P étant unitaire, il se factorise sous la forme $P = \left(X + \dfrac{3}{2}\right)^2 (X - 4)$.
2. Notons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ le polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines les nombres x, y et z. En exploitant les relations coefficients-racines, on sait que $a = -(x + y + z) = -2$ et $c = -xyz = \dfrac{1}{2}$. Enfin, on a $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{xy + xz + yz}{xyz} = -\dfrac{b}{c}$, donc $b = -\dfrac{c}{2} = -\dfrac{1}{4}$, et $P = X^3 - 2X^2 - \dfrac{1}{4}X + \dfrac{1}{2}$. Ce polynôme admet pour racine évidente $X = 2$: $P(2) = 8 - 8 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$. Même pas besoin de calculs pour le factoriser sous la forme $P = X(X-2) - \dfrac{1}{4}(X-2) = (X-2)\left(X^2 - \dfrac{1}{4}\right) = (X-2)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)\left(X + \dfrac{1}{2}\right)$. On a donc trouvé les trois racines du polynôme P et donc les valeurs de nos trois inconnues, qui peuvent toutefois être permutées indiféremment. On en déduit que
$\mathcal{S} = \left\{\left(2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) ; \left(2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) ; \left(-\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{2}\right) ; \left(\dfrac{1}{2}, 2, -\dfrac{1}{2}\right) ; \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2\right) ; \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 2\right)\right\}$

Exercice 1 (petits exercices sur les espaces vectoriels)

1. On essaye de « résoudre » le système en exprimant deux inconnues en fonction des deux autres (on ne peut pas espérer mieux), par exemple $t = x + y - z$, puis en remplaçant dans la deuxième équation $2x - y + 2z = 0$, donc $y = 2x + 2z$. On peut alors écrire $t = 3x + z$, et donc $G = \{(x, 2x + 2z, z, 3x + z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 2, 0, 3); (0, 2, 1, 1))$. Les deux vecteurs de la famille génératrice obtenue étant non colinéaires, c'est une base de G, qui est donc de dimension 2 (on peut naturellement obtenir d'autres bases tout aussi convenables, par exemple en gardant d'autres inconnues lors de la résolution du système).
2. Le plus rapide est de constater que $u_1 - u_2 = u_3$, ce qui suffit à prouver que la famille n'est pas libre. On peut aussi revenir à la définition et chercher les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. On est alors ramenés à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & 2c & = & 0 \\ 2a & & & + & 2c & = & 0 \\ a & + & 3b & - & 2c & = & 0 \end{array}\right.$.

La deuxième équation donne $c = -a$, puis en remplaçant dans la première $-a - b = 0$, donc $b = -a$. On remplace tout dans la dernière et on obtient $a - 3a + 2a = 0$, équation qui est toujours vérifiée. Tous les triplets de la forme $(a, -a, -a)$ sont donc solutions du système, ce qui prouve que la famille n'est pas libre. En particulier, quand $a = 1$, on retrouve $b = c = -1$, ce qui prouve que $u_1 - u_2 - u_3 = 0$. Dans la mesure où une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (qui est un espace vectoriel de dimension 3) est libre (et est une base) si et seulement si elle est génératrice, la famille ne peut pas non plus être génératrice (et là, pour le coup, je ne referai pas le calcul complètement inutile à partir de la définition).

3. Il s'agit d'une famille de trois polynômes dans un espace vectoriel qui est de dimension 3, il suffit donc de prouver qu'elle est libre pour qu'il s'agisse d'une base. Supposons donc $0 = aP_1 + bP_2 + cP_3 = \frac{a}{2}(X^2 - 3X + 2) - b(X^2 - 2X) + \frac{c}{2}(X^2 - X) = \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)X^2 + \left(2b - 3\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right) + a$. Le polynôme est nul si chacun de ses trois coefficients est nul, on a immédiatement $a = 0$, donc $-b + \frac{1}{2}c = 2b - \frac{c}{2} = 0$, ce qui ne peut être vérifié que si $b = c = 0$, donc la famille est bien libre.
   Pour obtenir les coordonnées de Q, on résout le même système mais avec des réels égaux à 1, -3 et 1 dans le second membre. La dernière équation donne donc immédiatement $a = 1$, et en remplaçant dans les deux autres on a $-b + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$ et $2b - \frac{c}{2} = -\frac{3}{2}$. L'addition des deux donnes $b = -1$, dont on déduit que $c = 1 + 2b = -1$. Autrement dit, Q a pour coordonnées $(1, -1, -1)$ dans notre base.

4. La suite nulle est une suite arithmétique, une somme de deux suites arithmétiques (de premier terme u_0 et raison r pour la première, premier terme v_0 et raison r' pour la seconde) est bien arithmétique (de premier terme $u_0 + v_0$ et de raison $r + r'$), et multiplier une suite arithmétique par une cponstante revient à multiplier sa raison et son premier terme par la même constante. Le sous-ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de E. De plus, on sait que toute suite arithmétique a un terme général qui peut s'écrire sous la forme $u_n = u_0 + nr$, ce qui revient à dire, en posant (v_n) la suite constante égale à 1 et w_n la suite définie par $w_n = n$, que $u_n = u_0 \times v_n + r \times w_n$ pour tout entier naturel n. Autrement dit, les suites arithmétiques sont exactement les combinaisons linéaires des deux suites (v_n) et (w_n), et $F = \text{Vect}((v_n), (w_n))$ est un espace vectoriel de dimension 2 (les deux suites n'étant pas proportionnelles). C'est logique dans la mesure où une suite arithmétique est définie de façon unique par deux réels indépendants : son premier terme et sa raison.

5. (a) Un peu de trigonométrie pour commencer : on sait bien que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ pour tout réel x, donc $f_2 = 2g_2 - g_0$. De même, la formule de triplication $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ implique que $f_3 = 4g_3 - 3g_1$. Comme par ailleurs $f_1 = g_1$ et $f_0 = g_0$, toute combinaison linéaire des quatre fonctions engendrant F_3 peut s'écrire $af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3 = (a - c)g_0 + (b - 3d)g_1 + 2cg_2 + 4dg_3$, et appartient donc à G_3, ce qui prouve que $F_3 \subset G_3$.

   (b) Supposons donc que $a + b\cos(x) + c\cos^2(x) + d\cos^3(x) = 0$. La méthode astucieuse consiste à dire que cette égalité est vérifiée pour tout réel de la forme $x = \arccos(t)$ lorsque $t \in [-1, 1]$, ce qui prouve que le polynôme $a + bt + ct^2 + dt^3$ s'annule une infinité de fois (sur tout l'intervalle $[-1, 1]$, donc), ce qui suffit à assurer que $a = b = c = d = 0$. Sinon, on utilise des méthodes plus classiques : pour $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve tout de suite $a = 0$. Pour $x = 0$ on a alors $b + c + d = 0$, et pour $x = \pi$, $-b + c - d = 0$, ce qui en additionnant donne $c = 0$ et donc $d = -b$. Reste à prendre par exemple $x = \frac{\pi}{3}$ pour trouver $\frac{1}{2}b + \frac{1}{8}d$, ce qui est incompatible avec la relation précédente sauf si $b = d = 0$. Les deux méthodes permettent de conclure que la famille (g_0, g_1, g_2, g_3) est libre, et donc que l'espace G_3 qu'elles engendrent est de dimension 4.

   (c) On peut prouver que F_3 est aussi de dimension 4 par une méthode similaire à celle de la question précédent et en déduire que $G_3 = F_3$ (lun est inclus dans l'autre et ils ont la même dimension) mais il est beaucoup plus rapide de prouver l'inclusion réciproque $G_3 \subset F_3$. En effet, $g_2 = \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_0$, et $g_3 = \frac{1}{4}f_3 + \frac{3}{4}f_1$, et on conclut comme à la première question.

Exercice 2 (polynômes)

1. Calculons bêtement $P_1 = 2X \times 1 - (1+X^2) \times 0 = 2X$, puis $P_2 = 2X \times 2X - \frac{1}{2}(1+X^2) \times 2 = 4X^2 - 1 - X^2 = 3X^2 - 1$.
2. Montrons par récurrence les deux propriétés d'un coup. Elles sont vraies au rang 0 (on a bien $a_1 = 2 = \frac{2}{1} \times a_0$). Supposons-les vraies au rang n, le terme dominant de P_n est donc $a_n X^n$, et celui de P_n' sera $n a_n X^{n-1}$. Le terme dominant de plus haut degré théorique (s'il ne s'annule pas) de P_{n+1} est alors $2X \times a_n X^n - \frac{1}{n+1} X^2 \times n a_n X^{n-1} = \left(2 - \frac{n}{n+1}\right) a_n X^{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n X^{n+1}$. Le coefficient n'étant pas nul (puisque $a_n \neq 0$ par hypothèse de récurrence), notre polynôme est bien de degré n, et on a prouvé en passant la relation $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$. On en déduit que $a_n = n+1$, ce qu'on prouve par récurrence si on est sérieux : $a_0 = 1$ c'est bon, et si $a_n = n+1$, alors $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \times (n+1) = n+2$, ce qui prouve l'hérédité.
3. Et si on faisait une petite récurrence ? Au rang 0, on a bien $P_0(-X) = P_0(X)$ puisque le polynôme est constant. Si on suppose que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, alors $P_n'(-X) = (-1)^{n+1} P_n'(X)$, et $P_{n+1}(-X) = -2XP_n(-X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'(-X) = (-1)^{n+1} \times 2XP_n(X) - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}(1+X^2)P_n'(X) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(X)$, ce qu'on voulait prouver. Les polynômes P_n ont donc une parité qui est celle de l'entier n.
4. (a) Oh ben tiens, une idée originale, je propose de faire une récurrence ! Au rang 1, $P'1 = 2 = 2P_0$ donc la propriété est vraie (techniquement, on peut même initialiser pour $n = 0$). Supposons donc que $P_n' = (n+1)P_{n-1}$, ce qui implique que $P_{n+1} = 2XP_n - (1+X^2)P_{n-1}$. Dérivons donc cette égalité : $P_{n+1}' = 2P_n + 2XP_n' - 2XP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}'$. On remplace à nouveau le terme en P_n' (en utilisant l'hypothèse de récurrence) pour obtenir $P_{n+1}' = 2P_n + 2(n+1)XP_{n-1} - 2XP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}' = 2P_n + 2nXP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}'$. Or, en décalant la relation de récurrence définissant la suite, on a $P_n = 2XP_{n-1} - \frac{1}{n}(1+X^2)P_{n-1}'$. Quitte à multiplier par n, on a donc $2nXP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}' = nP_n$, et $P_{n+1}' = 2P_n + nP_n = (n+2)P_n$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.

   (b) En remplaçant X par 0 dans la récurrence définissant la suite, on a $P_{n+1}(0) = -\frac{1}{n+1}P_n'(0) = -P_{n-1}(0)$ puisque $P_n' = (n+1)P_{n-1}$. Comme $P_1(0) = 0$, une récurrence immédiate permet de prouver que, pour tout entier $n = 2p+1$ impair, on a $P_{2p+1}(0) = 0$. Par contre, comme $P_0(0) = 1$, on aura $P_{2p}(0) = (-1)^p$ (là encore, une récurrence facile si on veut être rigoureux : $P_0(0) = 1$ comme on vient de le dire, et $P_{2p}(0) = (-1)^p \Rightarrow P_{2(p+1)}(0) = P_{2p+2}(0) = -P_{2p}(0) = (-1)^{p+1}$).

   (c) C'est immédiat : d'après la question a, $P_{n+1}' = (n+2)P_n$, donc $(n+2)\int_0^x P_n(t)\, dt = \int_0^x P_{n+1}'(t)\, dt = P_{n+1}(x) - P_{n+1}(0)$.

   (d) On sait que $P_3(0) = 0$, donc $P_3(x) = 4\int_0^x P_2(t)\, dt = 4\int_0^x 3t^2 - 1\, dt = 4[t^3 - t]_0^x = 4x^3 - 4x$.

De même, on sait que $P_4(0) = 1$, donc $P_4(x) = 1 + 5\int_0^x P_4(t)\ dt = 1 + 5\int_0^x 4t^3 - 4t\ dt = 1 + 5[t^4 - 2t^2]_0^x = 5x^4 - 10x^2 + 1$.

5. (a) Par définition, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1}$. Or, on sait que $\frac{1}{n+2}P'_{n+1} = P_n$ (question 4a), donc $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - (1+X^2)P_n$, ce qui est bien la relation demandée.

   (b) À x fixé, la suite $(P_n(x))$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'après la question précédente. L'équation caractéristique correspondante (dont on notera la variable a pour éviter les confusions) est $a^2 - 2ax + (1+x^2) = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4x^2 - 4(1+x^2) = -4$, qui est évidemment strictement négatif. Les racines de l'équation sont $a_1 = \frac{2x+2i}{2} = x+i$, et $a_2 = \frac{2x-2i}{2} = x - i$. Comme le module et l'argument de ces nombres complexes vont être impossibles à exprimer simplement, on va se contenter de l'expression complexe (vu ce qui nous est demandé à la question suivante, c'est de toute façon très bien). On en déduit donc qu'il existe deux constantes (complexes) A et B telles que $P_n(x) = A(x+i)^n + B(x-i)^n$. Les conditions initiales donnent $P_0(x) = 1 = A + B$ et $P_1(x) = 2x = (x+i)A + (x-i)B$. Comme $B = 1 - A$, on a donc $2x = (x+i)A + x - i - (x-i)A$, soit $x + i = 2iA$ et donc $A = \frac{x+i}{2i}$. On en déduit $B = 1 - A = \frac{i-x}{2i}$, soit $P_n(x) = \frac{(x+i)^{n+1}}{2i} - \frac{(x-i)^{n+1}}{2i}$.

   (c) Ah ben oui ça ne va pas être difficile ! D'après la question précédente, P_n coïncide avec le polynôme $\frac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$ sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini, donc les deux polynômes sont égaux (c'est le principe d'identification des coefficients si on veut faire savant).

6. Le nombre i ne pouvant pas être racine de P_n (puisque $P_n(i) = (2i)^n \neq 0$), x est racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n+1} = 1$. En posant $z = \frac{x+i}{x-i}$, z est donc une racine $(n+1)$-ème de l'unité, et $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$, avec $k \in \{0, \dots, n\}$. Si $z = \frac{x+i}{x-i}$, alors $zx - iz = x + i$, donc $x(z-1) = i(z+1)$, et $x = \frac{i(z+1)}{z-1}$, à condition bien entendu que $z \neq 1$. On supprime donc la valeur de z obtenue précédemment lorsque $k = 0$, et on trouve n valeurs pour x, égales à $x_k = \frac{i(e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}+1)}{e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}-1}$. On a bien évidemment très envie de factoriser en haut et en bas par l'angle moitié : $x_k = \frac{ie^{\frac{ik\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{i\frac{-k\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{i\frac{-k\pi}{n+1}})} = \frac{2i\cos(\frac{k\pi}{n+1})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n+1})} = \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}$ (attention tout de même, si $n+1$ est pair, on ne peut pas écrire la solution correspondant à $k = \frac{n+1}{2}$, qui vaut tout bêtement 0, sous forme d'une inverse de tangente). Ces valeurs sont toutes distinctes (les angles dont on prend les tangentes appartiennent tous à $]0, \pi[$, intervalle sur lequel la fonction tan est injective), donc on a obtenu n racines distcinctes (et réelles !) du polynôme P_n. Comme celui-ci est de degré n, on les a toutes. Il ne faut pas oublier que le polynôme P_n a un coefficient dominant égal à $n+1$ avant d'écrire la factorisation : $P_n = (n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}\right)$ dans le cas où n est un entier pair (puisqu'alors $n+1$ est impair), et $P_n = (n+1)X\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}\right)\prod_{k=\frac{n+3}{2}}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}\right)$ quand n est impair (si on tient vraiment à faire apparaitre les tangentes).

7. Les relations coefficients-racines nous assurent que la somme des racines de P_n est égale

à $-\dfrac{b_{n-1}}{a_n}$, où $a_n = n+1$ est le coefficient dominant de P_n calculé plus haut, et b_{n-1} est le coefficient de degré $n-1$ du même polynôme P_n. En reprenant l'expression explicite de P_n et en développant brutalement à coups de binôme de Newton, on a $b_{n-1} = \dfrac{1}{2i}\left(\dbinom{n+1}{n-1}i^2 - \dbinom{n+1}{n-1}(-i)^2\right) = 0$. En fait, il n'y a rien de surprenant là-dedans, on peut remarquer à l'aide de l'expression explicite des racines qu'elles sont opposées deux à deux (sauf la racine nulle dans le cas où n est impair). On peut aussi utiliser le fait que P_n est pair ou impair, ce qui assure que, si α est racine réelle de P_n, alors $-\alpha$ aussi. Comme le polynôme n'a que des racines réelles simples, cela assure que leur somme est nulle.

Pour le produit, les relations coefficients-racines nous assurent qu'il est égal à $\dfrac{(-1)^n b_0}{n+1}$, où b_0 est le coefficient constant de P_n. Or, ce coefficient constant est égal à $P_n(0)$. Lorsque n est impair, le produit est donc nul, ce qui n'a rien de surprenant puisque dans ce cas 0 est effectivement racine du polynôme P_n ! Lorsque n est pair, $(-1)^n = 1$, et on a donc un produit des racines égal à $\dfrac{(-1)^p}{2p+1}$, en ayant posé $n = 2p$.