TD n^o 7 : révisions pour le DS7

PTSI B Lycée Eiffel

21 mars 2019

Pour s'échauffer

Les deux questions sont complètement indépendantes :

1. Factoriser le polynôme $P = X^3 - X^2 - \frac{39}{4}X - 9$ sachant qu'il admet une racine double.
2. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & \frac{1}{2} \\ & & & & xyz & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

Exercice 1 (petits exercices sur les espaces vectoriels)

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $G = \{(x, y, z, t) \mid x + y - z - t = x - 2y + 3z + t = 0\}$. Donner une base et la dimension de G.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 3)$ et $u_3 = (2, 2, -2)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
3. On pose $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis déterminer les coordonnées du polynômes $Q = X^2 - 3X + 1$ dans cette base.
4. On se place dans l'espace vectoriel E de toutes les suites réelles, et on note F le sous-ensemble de E constitué de toutes les suites arithmétiques (quelle que soit leur raison). Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E, puis donner la dimension et une base de F.
5. Pour tout entier naturel n, on note $f_n(x) = \cos(nx)$ et $g_n(x) = \cos^n(x)$. On définit par ailleurs $F_n = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$ et $G_n = \text{Vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$, qui sont donc des sous-espaces vectoriels de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f_2 \in G_3$ et que $f_3 \in G_3$. En déduire rigoureusement que $F_3 \subset G_3$.
   (b) Quelle est la dimension de G_3 (à justifier rigoureusement) ?
   (c) Montrer que $F_3 = G_3$.

Exercice 2 (polynômes)

On considère la suite de polynômes (P_n) définie par $P_0 = 1$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = 2XP_n - \dfrac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'$.

1. Calculer P_1 et P_2.
2. On note a_n le coefficient dominant de P_n. Montrer par récurrence que $d^\circ(P_n) = n$ et que $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire la valeur de a_n.
3. Montrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. Que peut-on dire de la parité du polynôme P_n ?
4. On cherche dans cette question une expression intégrale de P_{n+1}.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}' = (n+2)P_n$.
   (b) Calculer $P_n(0)$ (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n).
   (c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\displaystyle\int_0^x P_n(t)\ dt$.
   (d) Calculer à l'aide des questions précédentes P_3 et P_4.
5. On cherche désormais une expression explicite du polynôme P_n.
   (a) Montrer que $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0$.
   (b) Pour un réel x fixé, exprimer $P_n(x)$ en fonction de x et de n en utilisant la question précédente (et vos connaissances sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2).
   (c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(X) = \dfrac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$.
6. Déterminer les racines du polynôme P_n et sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Calculer la somme et le produit des racines de P_n.