TD n° 5 : révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

13 décembre 2018

Exercice 1 (petits calculs sur les complexes)

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = \frac{(3+i)(2-3i)}{5+2i}$.
2. Soit f l'application du plan complexe dans lui-même définie par $f(z) = iz + 2 + 2i$. Reconnaitre l'application f et déterminer ses éléments caractéristiques (centre, rapport, angle).
3. On pose $P(z) = z^3 - z^2 + (i-3)z + 6 + 2i$.
 - (a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $a = -3 - 4i$.
 - (b) Montrer que P admet une racine réelle, qu'on déterminera.
 - (c) En déduire toutes les racines du polynôme P .

Exercice 2

La méthode de Newton sert à déterminer des valeurs approchées de solutions d'équations de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I (et ayant des signes opposés aux extrémités de I , pour assurer que l'équation admet bien une solution sur I). Pour cela, on construit une suite (x_n) de la façon suivante : $x_0 \in I$, et pour tout entier naturel n , le réel x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses (O_x) et de la tangente en x_n à la courbe de la fonction f .

1. Faire un dessin illustrant la construction des premiers termes de la suite (x_n) (on prendra une allure de type parabolique pour la courbe de f).
2. Montrer que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
3. Pour la suite de l'exercice, on pose $f(x) = x^2 - a$, où $a > 1$; $I =]0, +\infty[$ et $x_0 = a$.
 - (a) Vérifier que, dans ce cas, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$.
 - (b) Étudier la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2 + a}{2x}$ et la fonction $h : x \mapsto g(x) - x$ sur l'intervalle I .
 - (c) En déduire que la suite (x_n) est décroissante et minorée, puis qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
4. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$.
 - (a) Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$.
 - (b) En déduire que $|x_n - \sqrt{a}| \leq 2x_0(v_n)^{2^n}$.
5. On suppose désormais $a = 2$.
 - (a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n) .
 - (b) Montrer que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{4}{3^{(2^n)}}$.
 - (c) À partir de quelle valeur de n est-on sûr que x_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près ?

Exercice 3

On note f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ (ensemble qu'on notera D pour la suite de l'exercice) par $f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}$.

1. Vérifier que l'application f effectue une bijection de D dans lui-même (on donnera une expression de sa réciproque f^{-1}).
2. Déterminer $f(3i)$ (sous forme algébrique), $f(-i)$ (sous forme exponentielle) et $f(e^{i\frac{5\pi}{6}})$ (sous forme algébrique).
3. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
6. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
7. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$. On notera ses deux solutions a et b , avec $\operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(b)$.
(b) Calculer $\frac{a-i}{b-i}$.
(c) Montrer que, si $z \notin \{i, a\}$, alors $\frac{b-f(z)}{a-f(z)} = -\frac{b-z}{a-z}$.
8. Pour cette dernière question, on admet que quatre points A, B, C et D du plan complexe sont situés sur une même droite ou sur un même cercle si et seulement si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$. On note par ailleurs A, B et C les points respectifs du plan complexe d'affixes a, b et i .
(a) Montrer que, si $M \notin \{A, B, C\}$, M' est soit aligné avec A, B et M , soit sur le cercle circonscrit au triangle ABM (on a ici noté M et M' les points d'affixes respectives z et z' , pour un certain nombre complexe z).
(b) Montrer que $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) \equiv 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})[2\pi]$.
(c) En déduire une construction géométrique de M' quand M n'est pas sur la droite (AB) .
(d) Faire une figure précise dans le cas où M a pour affixe $z = 2 + 2i$.