TD n° 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 novembre 2018

Exercice 1

1. On va bien sûr procéder à une IPP mais pour qu'elle soit efficace, il vaut mieux modifier le $\cos^2$ pour le transformer en quelque chose qu'on saura intégrer. Pour celà, on utilise la formule de duplication du cosinus : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2} + \dfrac{1}{2}$. On calcule ensuite $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos(2x)}{2}\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\ dx$. La deuxième intégrale vaut simplement $\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2}{16}$. Pour l'intégrale de gauche, on effectue donc une IPP en posant $u'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2}$, soit par exemple $u(x) = \dfrac{\sin(x)}{4}$, et $v(x) = x$ qui donne $v'(x) = 1$. On a alors $I = \dfrac{\pi^2}{16} + \left[\dfrac{x\sin(4x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{4}\ dx = \frac{\pi^2}{16} + 0 - \left[-\frac{\cos(2x)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$.
2. Commençons donc par normaliser l'équation pour la mettre sous la forme $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{1}{x^3}$, ce qui nous impose de résoudre séparément sur les intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$. Plaçons par exemple sur J, où les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h(x) = Ke^{-3\ln(x)} = \dfrac{K}{x^3}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On obtient d'ailleurs la formule similaire $y_h(x) = \dfrac{L}{x^3}$ sur l'intervalle I, quitte à changer le signe de la constante. Cherchons désormais une solution particulière de la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{x^3}$ (en appliquant la méthode de variation de la constante). On aura alors $y_p'(x) = \dfrac{x^3K'(x) - 3x^2K(x)}{x^6} = \dfrac{xK'(x) - 3K(x)}{x^4}$. En remplaçant dans l'équation de départ (plutôt que sous la forme normalisée), on doit donc avoir $\dfrac{xK'(x) - 3K(x)}{x} + \dfrac{3}{x}K(x) = 1$, soit $K'(x) = 1$. On peut donc prendre $K(x) = x$, ce qui revient à choisir $y_p(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Les solutions de l'équation sur l'intervalle I sont donc toutes les fonctions y de la forme $y(x) = \dfrac{K + x}{x^3}$ (formule identique à la constante près sur l'intervalle I). Aucune de ces fonctions n'ayant une limite finie en 0, aucun recollement n'est possible pour cette équation.
3. Puisqu'on nous le propose, posons donc $t = \arctan(x)$, soit $x = \tan(t)$ et donc $dx = (1 + \tan^2(t))\ dt$. Les bornes sont également modifiées pour devenir $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, et on peut donc calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan^2(t))^2} \times (1 + \tan^2(t))\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2(t)}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\ dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.
4. C'est une équation du second ordre à coefficients constants, d'équation carcatéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$. Cette équation a pour solution évidente $r_1 = 1$ et pour deuxième solution $r_2 = 2$ (assez évidente aussi à vrai dire). Les solutions de l'équation homogène associée sont

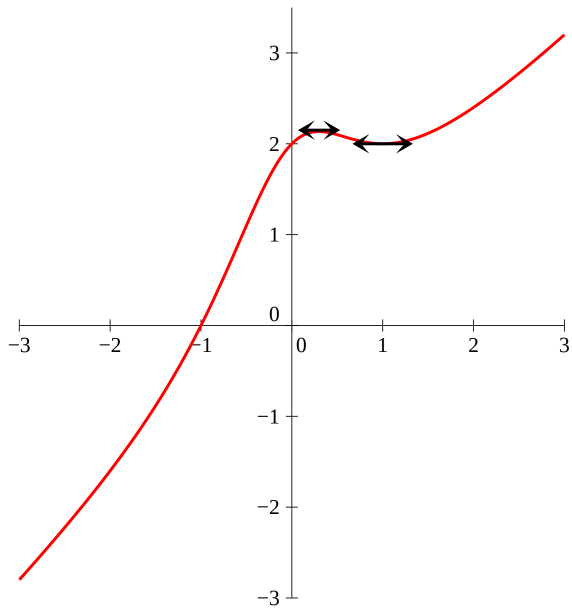
donc les fonctions de la forme $y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Reste à trouver une solution particulière de notre équation, que nous chercherons de la forme $y_p(x) = (ax+b)e^x$, car 1 est racine de l'équation caractéristique. On calcule donc $y_p'(x) = (a+ax+b)e^x$, puis $y''(x) = (2a+ax+b)e^x$, et on en déduit que y_p est solution de l'équation complète (en factorisant tout par e^x) si et seulement si $2a+ax+b-3a-3ax-3b+2ax+2b = 1$, soit $a = -1$ (et on n'a pas de condition sur b, qu'on prendra donc bêtement égal à 0). La fonction $x \mapsto -xe^x$ est donc solution particulière de notre équation, et toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = (A-x)e^x + Be^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

1. Après normalisation, l'équation $y' + \dfrac{2x}{x^2+1}y = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$ reste effectivement résoluble sur $\mathbb{R}$. Le solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{-\ln(x^2+1)} = \dfrac{K}{x^2+1}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On peut constater que $x \mapsto x$ est solution particulière évidente de l'équation complète, mais on la retrouve également par variation de la constante en posant $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{x^2+1}$. On a alors $y_p'(x) = \dfrac{(x^2+1)K'(x) - 2xK(x)}{(x^2+1)^2}$, et y_p est solution de notre équation si $\dfrac{(x^2+1)K'(x)-2xK(x)}{(x^2+1)^2} + \dfrac{2xK(x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$, soit $\dfrac{K'(x)}{x^2+1} = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$, donc $K'(x) = 3x^2+1$. On peut donc prendre $K(x) = x^3+x$, ce qui donne $y_p(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+1} = x$ (mais oui, ça se simplifie !). Les solutions de l'équation complète sont donc toutes les fonctions y telles que $y(x) = x + \dfrac{K}{x^2+1}$.
2. En reprenant l'expression obtenue à la question précédente, $y_0(0) = 1 \Leftrightarrow K = 1$, donc $f_0(x) = x + \dfrac{1}{x^2+1}$. De même, on aura avec les notations de l'énoncé $f_k(x) = x + \dfrac{k+1}{x^2+1}$.
3. Commençons par calculer $f_k'(x) = 1 - \dfrac{2(k+1)x}{(x^2+1)^2}$. On constate que, indépendamment de la valeur de k, on a $f_k'(0) = 1$, ce qui prouve bien que les tangentes en 0 son parallèles puisqu'elles ont toutes le même coefficient directeur.
4. Il suffit de dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{k+1}{x^2+1} = 0$ pour conclure que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$. On aurait d'ailleurs exactement la même conclusion en $-\infty$.
5. Soient k et k' deux réels distincts, $f_k(x) - f_{k'}(x) = x + \dfrac{k+1}{x^2+1} - x - \dfrac{k'+1}{x^2+1} = \dfrac{k-k'}{x^2+1}$ qui est toujours du signe de $k - k'$. La courbe $\mathcal{C}_k$ est donc toujours au-dessus de $\mathcal{C}_{k'}$ si $k > k'$, et toujours en-dessous si $k < k'$.
6. On sait que $f_1(x) = x + \dfrac{2}{x^2+1}$, donc $f_1'(x) = 1 - \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+2x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui a pour racine évidente $x = 1$. On peut donc le factoriser sous la forme $x^4+2x^2-4x+1 = (x-1)(ax^3+bx^2+cx+d) = ax^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2+(d-c)x-d$. Une petite identification des coefficients permet d'obtenir les conditions $a = 1$, $b - a = 0$ donc $b = 1$, $c_b = 2$ donc $c = 3$ et $d - c = -4$ donc $d = -1$ (cohérent avec la dernière équation). On trouve donc $x^4+2x^2-4x+1 = (x-1)(x^3+x^2+3x-1)$. Posons $g(x) = x^3+x^2+3x-1$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2+2x+3$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 24 < 0$. Puisque g' est strictement positive, la fonction g est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (le calcul des limites est évident). Il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. On peut préciser un peu plus : $g(0) = -1$ et $g(1) = 4$ donc le théorème des valeurs intermédiaires assure que $\alpha \in]0,1[$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant pour la fonction f :

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On ne peut pas vraiment calculer précisément $f(\alpha)$, même si on peut facilement l'encadrer : sur l'intervalle $[0, 1]$, on a $1 \leqslant x^2 + 1 \leqslant 2$, donc $1 \leqslant \dfrac{2}{x^2+1} \leqslant 2$. On en déduit facilement que $1 \leqslant f(\alpha) \leqslant 3$, et le tableau de variations assure qu'en fait $1 \leqslant f(\alpha) \leqslant 2$. La courbe $\mathcal{C}_1$ ressemble en fait à ceci :



Exercice 3

1. (a) L'équation peut s'écrire sous la forme $e^x + e^{-x} = 4$. En posant $X = e^x$, on la ramène à l'équation du second degré $X^2 - 4X + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 4 = 12$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$, et $X_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$. Ces deux valeurs étant positives, on a deux solutions à l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$: $x_1 = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $x_2 = \ln(2 - \sqrt{3})$.

   (b) On va tout simplement résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ lorsque $y \geqslant 1$, ce qui nous donnera une expression explicite de la réciproque. En adaptant la méthode appliquée à la question précédente, on se ramène à $e^x + e^{-x} = 2y$, puis à $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Le discriminant vaut désormais $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$ (il est donc nécessairement positif), et l'équation admet deux solutions $X_1 = \dfrac{2y + 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$, et $X_2 = y - \sqrt{y^2-1}$. Ces deux valeurs sont strictement positives car $y^2 - 1 \leqslant y^2 \Rightarrow \sqrt{y^2-1} \leqslant y$. Mais notre solution X_2 est par contre strictement inférieure à 1. En effet, $y - \sqrt{y^2-1} = \dfrac{y^2 - (y^2-1)}{y + \sqrt{y^2-1}} = \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2-1}} < 1$ (puisque le dénominateur est supérieur à y qui est lui-même supérieur à

1 par hypothèse). La valeur $\ln(X_2)$ est donc strictement négative, on l'exclut. De même, on prouve au contraire que $X_1 > 1$, donc l'unique solution positive de notre équation est $x_1 = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$. On a donc prouvé que ch était bijective de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$, de réciproque $g : y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

(c) Il suffit de dériver l'expression précédente : $g'(y) = \dfrac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2-1}} = \dfrac{\sqrt{y^2-1} + y}{\sqrt{y^2-1}(y + \sqrt{y^2-1})} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ comme annoncé. On remarquera en passant que la réciproque du ch a donc « presque » la même dérivée que la réciproque de la fonction sinus (et aussi, au signe près, que celle du cosinus classique).

2. On pose donc $y(x) = z(\arcsin(x)) = z(t)$. Dérivons en faisant attentions aux dérivées de composées : $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x))$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{2} \dfrac{-2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{1-x^2} z''(\arcsin(x)) = \dfrac{1}{1-x^2}\left(z''(\arcsin(x)) + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x))\right)$. On injecte tout celà dans notre équation différentielle pour obtenir $z''(\arcsin(x)) + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) + z(\arcsin(x)) = x$, soit en effectuant vraiment le changement de variable $z''(t) + z(t) = \sin(t)$. Ouf, c'est une équation qu'on sait résoudre !
Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $z_h(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons ensuite une solution particulière z_c à l'équation $z'' + z = e^{it}$. Malheureusement, i étant racine de l'équation caractéristique que nous nous sommes dispensés d'écrire il y a quelques instants, il faut chercher z_c sous la forme $z_c(t) = (at+b)e^{it}$ (avec a et b des constantes complexes). On a alors $z_c'(t) = (iat+ib+a)e^{it}$, puis $z_c''(t) = (-at-b+2ia)e^{it}$. Notre fonction est donc solution de l'équation (en factorisant tout par e^{it}) si et seulement si $2ia = 1$, soit $a = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$ (la valeur de b n'ayant aucune importance, on prendra $b = 0$). Autrement dit, $z_c(t) = -\dfrac{i}{2} te^{it}$, et on peut ensuite prendre comme solution particulière de notre équation réelle la fonction définie par $z_p(t) = \mathrm{Im}(z_c(t)) = -\dfrac{1}{2} t\cos(t)$.
On peut enfin conclure : les solutions de l'équation après changement de variable sont de la forme $z(t) = \left(A - \dfrac{1}{2}t\right)\cos(t) + B\sin(t)$, ce qui donne donc $y(x) = z(\arcsin(x)) = \left(A - \dfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)\sqrt{1-x^2} + Bx$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On a utilisé pour simplifier l'expression la relation classique $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

3. On est repartis pour des calculs très similaires : $y(x) = z(g(x)) = z(t)$, donc $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} z'(g(x))$, et $y''(x) = \dfrac{1}{x^2-1} z''(g(x)) - \dfrac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} z'(g(x))$. On introduit tout ça dans l'équation et on obtient de façon très similaire à la question précédente $-z''(t) + z(t) = \mathrm{ch}(t)$ (puisqu'on a posé $t = g(x)$, on a donc $x = \mathrm{ch}(t)$, g étant par définition réciproque de ch).
L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions de la forme $z_h(t) = Ae^t + Be^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, ou si on préfère $z_h(t) = C\,\mathrm{ch}(t) + D\,\mathrm{sh}(t)$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. Pour une solution particulière, procédons par superposition et cherchons une solution z_1 à l'équation $-z'' + z = \dfrac{1}{2}e^t$ sous la forme $z_1(t) = (at+b)e^t$ (faut pas rêver, on a encore besoin d'augmenter le degré du polynôme), ce qui donne $z_1(t) = (at+b+a)e^t$ puis $z_1''(t) = (at+b+2a)e^t$. La fonction est solution si $-2a = \dfrac{1}{2}$, soit $a = -\dfrac{1}{4}$ et donc $z_1(t) = -\dfrac{1}{4}te^t$. De même on cherche une solution z_2 à l'équation $-z'' + z = \dfrac{1}{2}e^{-t}$ sous la forme $z_2(t) = (at+b)e^{-t}$, et un calcul

quasiment identique donne $a = \dfrac{1}{4}$, donc $z_2(t) = \dfrac{1}{4}te^{-t}$. Une solution particulière de l'équation complète est donc la fonction $z_p : t \mapsto \dfrac{1}{4}t(e^{-t} - e^t) = -\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{sh}(t)$, et les solutions de l'équations sont les fonctions définies par $z(t) = C\,\mathrm{ch}(t) + \left(D - \dfrac{1}{2}t\right)\mathrm{sh}(t)$.

On remonte enfin le changement de variable, en constatant en passant que la relation classique $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ implique sur notre intervalle que $\mathrm{sh}(t) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(t) - 1}$. On en déduit alors que $y(x) = Cx + (D - \ln(x + \sqrt{x^2-1}))\sqrt{x^2-1}$. C'est beau, hein ?

4. On est repartis pour un dernier tour de manège ? En fait ce n'est pas vraiment nécessaire, on peut poser $y(x) = z(g(-x)) = z(t)$, mais on peut surtout se rendre compte que les solutions obtenues à la question précédente restent valables sur notre dernier intervalle : le Cx est inchangé, les $\sqrt{x^2-1}$ aussi, et il faut simplement modifier le $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ en $\ln(\sqrt{x^2-1} - x)$ (qui a la même dérivée).

Exercice 4

1. (a) Jusque-là c'est facile : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

   (b) C'est déjà plus compliqué : on doit bien sûr avoir $x \neq 0$ pour que les bornes de l'intégrale définissant g aient un sens, mais il faut en plus de celà que la fonction f soit continue et donc en particulier définie entre ces deux bornes. Autrement dit, il ne faut surtout pas que -1 soit situé entre $\dfrac{1}{x}$ et x. Or, celà se produira systématiquement lorsque $x < 0$: si $x < -1$, alors $\dfrac{1}{x} > -1$ et si $x \in]-1, 0[$ alors $\dfrac{1}{x} < -1$. Lorsque $x > 0$, par contre, on ne risque pas d'avoir de problème puisque les deux bornes de l'intégrale sont alors positives. Bref, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}$.

   (c) Échanger les bornes d'une intégrale revient à changer son signe, donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = -g(x)$.

2. (a) Il n'y a rien à expliquer, c'est la définition de l'intégrale ! Quelle question débile...

   (b) De l'expression précédente, on déduit $g'(x) = f(x) + \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (attention à bien dériver la composée). On peut calculer : $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{(\frac{1}{x}+1)^2(\frac{1}{x^2}+1)} = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x^2 \times x^2}{(1+x)^2(1+x^2)} = \dfrac{1+x^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Mais on connait les primitives de ce qu'on vient d'obtenir et on en déduit l'existence d'une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $g(x) = -\dfrac{1}{x+1}$. Il suffit de déterminer une valeur de g pour calculer k. On a $g(1) = 0$ (les deux bornes de l'intégrale étant alors identiques), donc $0 = -\dfrac{1}{2} + k$ et $k = \dfrac{1}{2}$. On peut conclure : $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x+1}$.

3. (a) Si on pose $u = \dfrac{1}{t}$, ou $t = \dfrac{1}{u}$, on a $dt = -\dfrac{1}{u^2}\,du$, et les bornes de l'intégrale sont échangées. Quitte à annuler ces deux changements de signe, $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(\frac{1}{u}+1)^2(\frac{1}{u^2}+1)} \times \frac{1}{u^2}\,du = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{u^2}{(u+1)^2(u^2+1)}\,du$ (le calcul de simplification est rigoureusement identique à celui de la question précédente).

   (b) On peut bien sûr remplacer la variable muette u par un t dans le calcul précédent et ajouter cette nouvelle expression à l'expression initiale : $2g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt +$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1+t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$. On en déduit que $g(x) = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ (c'est bien la même expression que plus haut, quitte à tout remettre au même dénominateur).

4. (a) Pour une fois, soyons bourrins, et effectuons une brutale mise au même dénominateur : $\dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1} = \dfrac{a(t+1)(t^2+1) + b(t^2+1) + (ct+d)(t+1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)}$. Contentons-nous de développer le numérateur : $a(t^3+t^2+t+1)+b(t^2+1)+c(t^3+2t^2+t)+d(t^2+2t+1) = (a+c)t^3 + (a+b+2c+d)t^2 + (a+c+2d)t + a+b+d$. Par identification, on obtient les conditions $a+c=0$, $a+b+2c+d=0$, $a+c+2d=0$ et $a+b+d=1$. On en déduit que $c=-a$, donc $2d=0$ (troisième condition) et $d=0$. On reporte alors dans la deuxième équation : $a+b-2a=0$, soit $a=b$. Reste alors à exploiter la dernière condition, qui devient $a+a=1$, soit $a=b=\dfrac{1}{2}$ et $c=-\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $f(t) = \dfrac{1}{2(t+1)} + \dfrac{1}{2(t+1)^2} - \dfrac{t}{2(t^2+1)}$.

   (b) On déduit de la question précédente une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$: $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln(t+1) - \dfrac{1}{2(t+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(t^2+1)$. On peut alors calculer directement $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right) + \dfrac{1}{2(\frac{1}{x}+1)} + \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \dfrac{1}{2}\ln(x) + \dfrac{x}{2(x+1)} + \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{4}\ln(x^2) = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ (tous les ln s'annulent puisque $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

5. Notons I l'intégrale à calculer et commençons par écrire que $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\theta)} + \frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}\,d\theta$. On peut alors avoir la brillante idée de poser $t = \tan(\theta)$, ou encore $\theta = \arctan(t)$, donc $d\theta = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$. On trouve alors $I = \displaystyle\int_{\tan(\alpha)}^{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \frac{1}{1+t^2+2t} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt$ (en utilisant la relation $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)} = 1+\tan^2(\theta)$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$ (c'est dans le cours de trigo !) pour en déduire que $I = g(\tan(\alpha))$. En utilisant les résultats des questions précédentes, on peut conclure que $I = \dfrac{\tan(\alpha)-1}{2(1+\tan(\alpha))}$.