TD n° 4 : révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

22 novembre 2018

Exercice 1

Calculs divers (et indépendants) :

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2(x) dx$.
2. Résoudre l'équation différentielle $x^3 y' + 3x^2 y = 1$.
3. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ à l'aide du changement de variable $t = \arctan(x)$.
4. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle du premier ordre $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$.

1. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'unique solution f_0 de l'équation vérifiant $f_0(0) = 1$. On notera plus généralement f_k l'unique solution vérifiant $f_k(0) = 1 + k$, et $\mathcal{C}_k$ la courbe intégrale correspondante.
3. Vérifier que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 0 sont toutes parallèles.
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une asymptote oblique commune en $+\infty$.
5. Étudier les positions relatives des différentes courbes $\mathcal{C}_k$.
6. Étudier les variations de la solution f_1 , puis tracer une allure soignée de sa courbe $\mathcal{C}_1$ (on démontrera précisément que sa dérivée f_1' s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$, même si on ne sera pas capable de déterminer précisément la valeur d'une de ces deux racines).

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $(1 - x^2)y'' - xy' + y = x$.

1. Question préliminaire.
 - (a) Résoudre l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$.
 - (b) Montrer que la fonction ch est bijective de $[0, +\infty[$ vers un intervalle à préciser, et déterminer une expression explicite de sa réciproque (à l'aide de la fonction $\ln$), qu'on notera g pour la suite de l'exercice. Pour cela, on résoudra l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ en ne gardant que la solution positive de l'équation.

(c) Vérifier que, $\forall y > 1$, $g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$.

2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $] - 1, 1[$ en effectuant le changement de variable $t = \arcsin(x)$.
3. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]1, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = g(x)$, où g est la fonction définie plus haut.
4. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $] - \infty, -1[$.

Exercice 4

On définit dans cet exercice une fonction g par la formule $g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} dt$, et on va donner plusieurs méthodes permettant de calculer explicitement la valeur de $g(x)$. Les questions 2, 3 et 4 de l'exercice sont **indépendantes**, il est donc hors de question d'utiliser le résultat d'une de ces questions (ou même d'une sous-question) pour traiter les autres.

1. On pose $f(t) = \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
- (b) En déduire celui de la fonction g .
- (c) Comparer les valeurs de $g(x)$ et de $g\left(\frac{1}{x}\right)$ quand cela a un sens.

2. Première méthode : on note F une primitive quelconque de f valable sur le domaine de définition de g .

- (a) Expliquer pourquoi $g(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$.
- (b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de f , puis explicitement. En déduire une expression de $g(x)$.

3. Deuxième méthode : exploitation astucieuse d'un changement de variable.

- (a) En posant $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, donner une nouvelle expression de $g(x)$.
- (b) Faire la somme des deux expressions intégrales de $g(x)$, et retrouver l'expression explicite de $g(x)$.

4. Troisième méthode : bourrage.

- (a) Décomposer en éléments simples $f(t)$ sous la forme $f(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct+d}{t^2+1}$.
- (b) En déduire l'expression de $g(x)$ par une intégration directe.

5. Complément : soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer $\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1 + \sin(2\theta)} d\theta$ (il y a bien sûr un lien avec le reste de l'exercice).