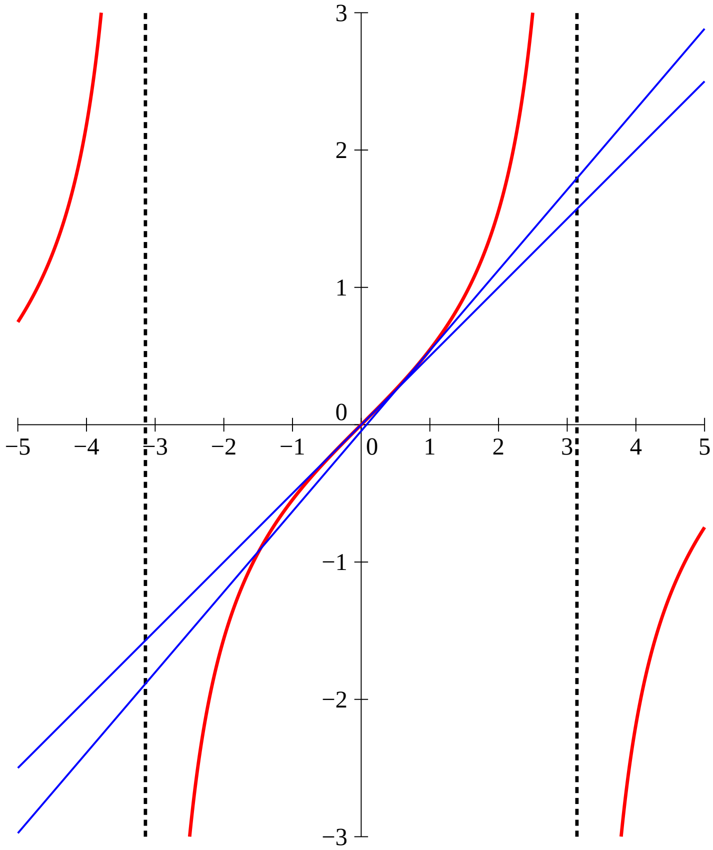
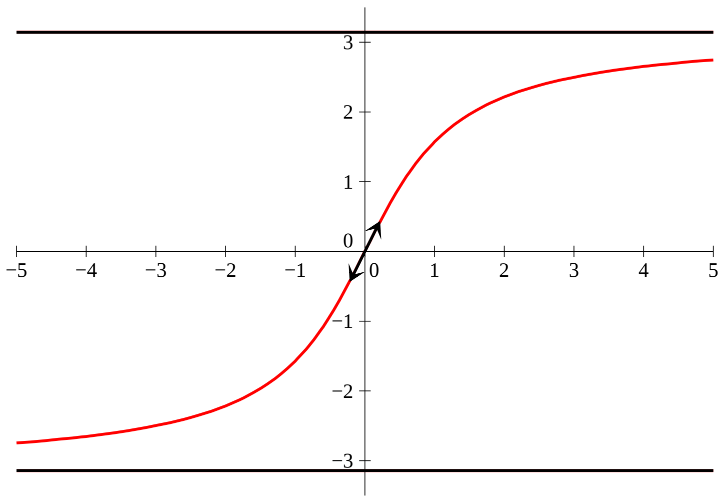
# Exercice 1

1. La fonction $f$ est définie en $x$ si $\cos(x) \neq -1$, donc si $x \not\equiv \pi[2\pi]$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Les fonctions sin et cos étant restectivement impaire et paire, $f$ est le quotient d'une fonction impaire par une fonction paire, et donc impaire. De plus, elle est très clairement $2\pi$-périodique. On peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $I = [0, \pi[$.
3. Il suffit de connaitre ses valeurs classiques : $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}-2}{-2} = 1-\sqrt{2}$ ; et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.
4. Il s'agit donc de résoudre sur $\mathcal{D}_f$ l'équation $\sin(x) = 1+\cos(x)$, ou encore $\sin(x)-\cos(x) = 1$. Une méthode originale : on élève tout au carré (bien entendu, il ne s'agit alors que d'une implication) pour obtenir $\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x) = 1$, soit $2\sin(x)\cos(x)$ en utilisant l'égalité $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$. En éliminant les valeurs pour lesquelles $f$ n'est pas définie, on trouve donc $x \equiv 0[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On constate facilement que 0 n'est en fait pas solution de l'équation, et $-\frac{\pi}{2}$ non plus. Par contre, on a bien $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, et on en déduit que $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. La fonction $f$ est certainement dérivable sur $[0, \pi[$, et $f'(x) = \frac{\cos(x)(1+\cos(x))+\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1}{1+\cos(x)}$, qui est toujours positif puisque $-1 \leq \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $[0, \pi[$.
6. On calcule sans difficulté $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$, donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{x}{2}$. De même, on a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}-1$ (en exploitant l'imparité de $f$ et la question 3), et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$, donc la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ a pour équation $y = (2-\sqrt{2})\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}-1$ (ça ne vaut pas vraiment le coup de tenter de simplifier, pour tracer la tangente, on utilisera le point de la courbe d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et le coefficient directeur.
7. Voici une allure (oui, je sais, on ne voit pas grand chose au niveau des tangentes) :




8. La fonction étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$, elle y est bijective. L'imparité de la fonction assure que $\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = -\infty$, donc l'intervalle image est simplement $\mathbb{R}$ tout entier. L'allure de la courbe de la réciproque est obtenue en symétrisant la courbe précédente par rapport à la droite d'équation $y = x$, ce qui donne quelque chose ressemblant à ceci (j'ai indiqué la tangente en 0 qui est symétrique de celle de $f$, donc d'équation $y = 2x$) :



## Exercice 2

1. On calcule donc brillamment (c'est particulièrement palpitant) $a_0 = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1^2} = 1$ ; $a_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1^2} = 1$ ; $a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{24}{2^2} = 2$ ; $a_3 = \frac{1}{4} \times \frac{720}{6^2} = 5$ et $a_4 = \frac{1}{5} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{24^2} = \frac{7 \times 6 \times 3}{3^2} = 14$. On en déduit ensuite $S_0 = a_0^2 = 1$ ; $S_1 = 2a_0a_1 = 2$ ; $S_2 = 2a_0a_2 + a_1^2 = 5$ ; $S_3 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 = 14$ et $S_4 = 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = 42$ (la réponse est 42 !). Bien sûr, ceux qui ont lu la question 5 ne seront pas surpris des premiers résultats. Reste à calculer les valeurs de $T_i$ : $T_0 = 0$ ; $T_1 = a_1a_0 = 1$ ; $T_2 = a_1^2 + 2a_2a_0 = 5$ ; $T_3 = a_1a_2 + 2a_2a_1 + 3a_3a_0 = 2 + 4 + 15 = 21$ et $T_4 = a_1a_3 + 2a_2^2 + 3a_3a_1 + 4a_4a_0 = 5 + 8 + 15 + 56 = 84$. Cette fois-ci il suffit d'aller lire l'énoncé de la question 2 pour anticiper les résultats.
2. Dans la somme définissant $T_n$, on peut faire le changement d'indices $j = n - k$ (ce qui revient à écrire les termes de la sens en ordre inverse) pour obtenir $T_n = \sum_{j=0}^{n}(n-j)a_{n-j}a_j = \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_ka_{n-k} = n\sum_{k=0}^{n} a_ka_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} ka_ka_{n-k} =)nS_n - T_n$. On a donc $2T_n = S_n$, soit $T_n = \frac{n}{2}S_n$.
3. Là, il s'agit juste de manipulations sur les factorielles : par définition $(n+2)a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$, et par ailleurs $2(2n+1)a_n = \frac{2}{n+1} \times \frac{(2n+1)!}{n!^2} = \frac{2 \times (2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2n+2}{n+1} \times \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$, qui est bien égal à l'expression calculée plus haut.
4. Les deux sommes ayant les mêmes indices, on peut les regrouper : $T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)a_ka_{n+1-k}$. Or, en appliquant la question 3 avec $n = k-1$, on a $(k+1)a_k = 2(2k-1)a_{k-1}$. Cette formule n'est toutefois valable que si $k \geq 1$, on va donc isoler le terme 0 de la somme précédente avant de la transformer : $T_{n+1} + S_{n+1} = a_0a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}(k+1)a_ka_{n+1-k} = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} 2(2k-1)a_{k-1}a_{n-(k-1)}$. En effectuant le changement d'indice $k = k - 1$ dans la somme, on peut alors écrire $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2(2k+1)a_ka_{n-k} = a_{n+1} + 4\sum_{k=0}^{n} ka_ka_{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} a_ka_{n-k} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n$. Il ne reste plus qu'à exploiter la question 2 : $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$. Il suffit ensuite d'exploiter le fait que $T_{n+1} = \frac{n+1}{2}S_{n+1}$ (c'est toujours la question 2) pour transformer le membre de gauche et obtenir la deuxième formule.
5. Prouvons par récurrence la propriété $P_n$ : $S_n = a_{n+1}$. Au rang 0 la propriété est vraie puisque $S_0 = 1 = a_1$ (les calculs de la première question prouvent même la propriété jusqu'au rang 3). Supposons maintenant la propriété vérifiée au rang $n$, alors on peut écrire, d'après la question précédente, $S_{n+1} = \frac{2}{n+3}a_{n+1} + \frac{4(n+1)}{n+3}S_n = \frac{2+4(n+1)}{n+3}a_{n+1}$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. Or, $\frac{2+4n+4}{n+3}a_{n+1} = \frac{2(2(n+1)+1)}{n+3}a_{n+1} = a_{n+2}$ en utilisant la relation prouvée à la question 3, donc on a prouvé que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, ce qui achève notre démonstration par récurrence.

6. Ce n'est pas du tout évident à prouver à partir de la définition, par contre on peut le faire très facilement en procédant par récurrence (forte de préférence). Le nombre $a_0$ est bien entendu un nombre entier, supposons maintenant que **tous** les nombres $a_k$ sont des entiers lorsque $k \leq n$, alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ est évidemment un nombre entier (c'est une somme de produits d'entiers). Comme on vient de prouver que $S_n = a_{n+1}$, cela prouve que $a_{n+1}$ est entier, donc la récurrence fonctionne.

# Exercice 3

1. La fonction $f$ est définie en $x$ si $2x\sqrt{1-x^2}$ existe et est compris entre $-1$ et $1$. Pour simplifier les calculs (ça resservira de toute façon ensuite), posons $g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$. La fonction $g$ est définie sur $\mathcal{D}_g = [-1, 1]$ (puisque $1 - x^2$ doit être positif), dérivable sur $]-1, 1[$ (les valeurs qui annulent la racine carrée risquent de poser problème pour la dérivabilité), de dérivée $g'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-x^2) - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. En particulier, cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, qui s'annule lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On calcule $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \dfrac{1}{2}} = 1$ et de même $g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$ (on peut aussi constater aisément que $g$ est une fonction impaire). On peut résumer les calculs effectués dans le tableau de variations suivants (bien entendu, $g(-1) = g(1) = 0$) :

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $g$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

En particulier on constate que $g$ est bornée par $-1$ et $1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$. De plus, la fonction $g$ est impaire donc $f$ aussi (puisque arcsin elle-même est impaire), on peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0, 1]$ et compléter par symétrie par rapport à l'origine du repère.

2. La fonction $f$ n'est pas dérivable en $-1$ et en $1$ car la fonction $g$ n'y est pas dérivable (annulation de l'expression sous la racine carrée). De plus, pour que la fonction $f = \arcsin(g)$ soit dérivable en $x$, il faut que $g(x) \neq -1$ et $g(x) \neq 1$ (puisque arcsin n'est pas dérivable en $-1$ et en $1$). D'après l'étude de la fonction $g$ à la question précédente, $f$ n'est pas non plus dérivable en $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction $f$ est donc dérivable sur chacun des trois intervalles $\left]-1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$.

3. On a déjà calculé $g'(x) = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$, on en déduit que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{(1-2x^2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} \times \varepsilon(1-2x^2)$, où $\varepsilon(u)$ désigne le signe de $u$.

4. Sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, le signe de $1 - 2x^2$ est positif, et on a donc simplement $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, dont on déduit que $f(x) = 2\arcsin(x) + K$ sur cet intervalle, pour une certaine

constante réelle $K$. Comme $f(0) = 0 = 2\arcsin(0)$, on a $K = 0$ et donc $f(x) = 2\arcsin(x)$ sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Sur chacun des deux autres intervalles par contre, on aura $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. Sur $\left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, on en déduit que $f(x) = 2\arccos(x) + K_1$, expression qui restera valable pour $x = -1$ par continuité de la fonction $f$. Comme $f(-1) = 0$ et $2\arccos(-1) = 2\pi$, on aura $K_1 = -2\pi$, donc $f(x) = 2\arccos(x) - 2\pi$ sur cet intervalle. De même, on aura $f(x) = 2\arccos(x) + K_2$ sur le dernier intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$, avec $f(1) = 2\arccos(1) = 0$, donc $f(x) = 2\arccos(x)$ sur ce dernier intervalle. En particulier, l'égalité donnée en début d'énoncé est vraie uniquement sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (on peut fermer les crochets car l'égalité reste vraie aux bornes par continuité de $f$).

5. (a) C'est une conséquence immédiate du fait que la fonction sin est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$ (en fait, on pose simplement $\theta = \arcsin(x)$).

   (b) Dans l'intervalle donné, on peut poser $t' = \pi - t$, de façon à avoir $\sin(t') = \sin(t)$, et surtout $t' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $\pi - t = t' = \arcsin(\sin(t')) = \arcsin(\sin(t))$, ce qui est l'égalité souhaitée. De même, si $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, on peut poser $t' = -\pi - t$ qui a le même sinus que $t$ et appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et on en déduit que $\arcsin(\sin(t)) = -\pi - t$.

   (c) On peut écrire $f(\sin(\theta)) = f(2\sin(\theta)\sqrt{1-\sin^2(\theta)}) = f(2\sin(\theta)\sqrt{\sin^2(\theta)} = f(2\sin(\theta)\cos(\theta)) = f(\sin(2\theta))$ puisque sur notre intervalle, $\sin(\theta) \geq 0$. Autrement dit, $f(x) = \arcsin(\sin(2\theta))$. Mais attention à l'intervalle dans lequel se trouve $2\theta$. Il n'appartiendra à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ que si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, c'est-à-dire si $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dans ce cas, on a simplement $f(x) = 2\theta = 2\arcsin(x)$, comme prévu. Par contre, si par exemple $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, on aura $2\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc $f(x) = \arcsin(\sin(2\theta)) = \pi - 2\theta = \pi - 2\arcsin(x) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = 2\arccos(x)$. De même dans le dernier intervalle on trouve $f(x) = -\pi - 2\arcsin(x) = 2\arccos(x) - 2\pi$, on retrouve bien les mêmes expressions que précédemment.

## Exercice 4

1. (a) Ah, une question de cours : $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$. On en déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Cette valeur est évidemment égale à $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)$. De plus, $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (puisqu'il s'agit de l'image d'un réel positif par la fonction arctan) et $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (pour la même raison). La fonction tan étant bijective sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut déduire de l'égalité de leurs tangentes que $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

   (b) On peut effectuer le même genre de raisonnement : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{40}} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$. Les deux nombres dont on cherche à prouver l'égalité ont donc la même tangente, et ils appartiennent tous les deux à l'intervalle $[0, \pi[$, c'est suffisant.

(c) C'est trivial à partir des questions précédentes : $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.

2. (a) Un récurrence simple suffit ici : $F_1^2 - F_0F_2 = 1 - 0 = 1 = (-1)^0$, donc $P_0$ est vraie. Supposons $P_n$ vraie, alors $F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} = F_{n+2}^2 - (F_{n+2} + F_{n+1})F_{n+1} = F_{n+2}(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}^2$. Or, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, donc $F_{n+2} - F_n = F_{n+1}$, donc l'expression devient $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. On a bien prouvé la propriété au rang $n + 1$.

(b) On va toujours utiliser la même technique, en calculant la tangente des deux membres de l'égalité, mais en l'appliquant à l'égalité $G_{2n} - G_{2n+2} = G_{2n+1}$. À droite, $\tan(G_{2n+1}) = \frac{1}{F_{2n+1}}$ par définition. À gauche, via la formule d'addition des tangentes, on a $\tan(G_{2n} - G_{2n+2}) = \frac{\frac{1}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 + \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+2} - F_{2n}}{1 + F_{2n}F_{2n+2}}$. Or, $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$ (c'est la définition de la suite de Fibonacci), donc le numérateur est simplement égal à $F_{2n+1}$. Et en utilisant le résultat de la question précédente, on a $F_{2n}F_{2n+2} = F_{2n+1}^2 - (-1)^{2n} = F_{2n+1}^2 - 1$, donc le dénominateur est en fait égal à $F_{2n+1}^2$. On en déduit que $\tan(G_{2n} - G_{2n+2}) = \frac{1}{F_{2n+1}}$. Nos deux nombres ont donc la même tangente, et ils sont comme d'habitude compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit à prouver leur égalité.

En calculant $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ et $F_8 = 21$, les trois premières valeurs de $n$ donnent les formules suivantes : $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ ; pour $n = 2$ on obtient $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$ (tiens, ces formules nous rappellent quelque chose !), et enfin pour $n = 3$ : $\arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{1}{21}\right)$.

(c) On peut prouver facilement cette formule par récurrence. Pour $n = 1$, elle dit simplement que $\frac{\pi}{4} = G_2 = \arctan(1)$, ce qui est vrai. Et en supposant la formule vraie au rang $n$, alors on part de cette formule et on uilise celle démontrée à la question précédente pour remplacer $G_{2n}$ : $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n-1} G_{2k+1} + (G_{2n+1} + G_{2n+2}) = \sum_{k=1}^{n} G_{2k+1} + G_{2n+2}$, et c'est fini.

Lorsque $n = 4$, on devrait donc trouver $\frac{\pi}{4} = G_3 + G_5 + G_7 + G_8$, soit $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{1}{21}\right)$.

3. (a) Pour changer, calculons donc la tangente du membre de gauche, qui vaut $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{xy}} = \frac{x + y}{xy - 1}$. Avec les hypothèses effectuées, le membre de gauche est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (chacune des arctangentes est inférieure à $\frac{\pi}{4}$ puisque $0 < \frac{1}{x} \leq 1$ et $0 < \frac{1}{y} < 1$), et le mebre de droite est dans le même intervalle, donc nos deux nombres sont bien égaux à partir du moment où ils ont la même tangente.

(b) Ne surtout pas refaire de calculs : on remplace $y$ par $-y$ et on utlise l'imparité de l'arctangente pour la première et on pose bêtement $x = y$ pour la deuxième.

(c) Eh bien, soyons donc bourrins :

- En posant $x = 5$ et $y = \frac{331}{17}$, on calcule joyeusement $\frac{y-x}{xy+1} = \frac{\frac{331}{17} - \frac{85}{17}}{1 + \frac{1\ 655}{17}} = \frac{246}{1\ 672} = \frac{123}{836}$, donc ça marche (en exploitant la deuxième des trois formules de la question précédente).
- On pose cette fois $y = \frac{41}{3}$ et on calcule $\frac{2y}{y^2-1} = \frac{\frac{82}{3}}{\frac{1\ 681}{9} - \frac{9}{9}} = \frac{82 \times 3}{1\ 672} = \frac{123}{836}$, et on conclut cette fois avec la troisième formule.
- Posons cette fois $x = 18$ et $y = 239$, et calculons $\frac{y-x}{1+xy} = \frac{221}{1 + 4\ 780 - 478} = \frac{221}{4\ 304} = \frac{17 \times 13}{331 \times 13} = \frac{17}{331}$ (j'ai rédigé le calcul comme je l'aurais fait à la main, en effectuant la multiplication du dénominateur sous la forme $18 \times 239 = 20 \times 239 - 2 \times 239$, ensuite la simplication est facile à voir quand le résultat est donné dans l'énoncé).
- On pose enfin $x = 18$ et $y = 57$ et on calcule $\frac{x+y}{xy-1} = \frac{75}{1\ 140 - 114 - 1} = \frac{75}{1\ 025} = \frac{25 \times 3}{25 \times 41} = \frac{3}{41}$.

(d) En appliquant successivement les formules 1, puis 3 et 2, puis 4 obtenues à la question précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \\
&= 4\arctan\left(\frac{17}{331}\right) + 4\arctan\left(\frac{123}{836}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \\
&= 4\arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 8\arctan\left(\frac{3}{41}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \\
&= 12\arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 8\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right)
\end{aligned}$$