TD n° 2 : révisions pour le DS1

PTSI B Lycée Eiffel

20 septembre 2018

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes (questions indépendantes) :

1. $2x + 1 = \dfrac{1}{x}$
2. $\sqrt{x^2 + 5x + 3} < x + 2$
3. $x^3 - 39x + 70 = 0$
4. $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+3} \leqslant \dfrac{36}{x^2-9}$
5. $e^x + e^{-x} = 2m$ (on donnera les solutions en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$).

Exercice 2

On pose $f(x) = |x^2 + x - 3| - x^2 + 3$.

1. Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue en distinguant plusieurs intervalles.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis dresser le tableau de signes de la fonction f.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f (on donne $\sqrt{13} \simeq 3.6$).

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Effectuer une étude rapide de la fonction f (variations, limites, la courbe n'est pas demandée).
2. Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.
3. Déterminer deux intervalles I et J (les plus grands possibles) tels que f effectue une bijection de I vers J. En notant g la réciproque de cette bijection, donner le tableau de variations de la fonction g.

Exercice 4

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x(\ln(x))^n$ (les fonctions f_n sont donc définies sur $\mathbb{R}^{+*}$), et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Quelles sont les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition ?
2. Effectuer l'étude des variations des fonctions f_1 et f_2 (on dressera un tableau de variations complet à chaque fois).
3. Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Vérifier plus généralement qu'il existe deux points du plan qui sont communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
4. Étudier plus généralement les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
5. Que peut-on dire des positions de toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (soyez le plus précis possible) ?
6. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
7. Généraliser les résultats de la question 2 en étudiant les variations de f_n pour tout entier $n \geqslant 1$ (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n).

Exercice 5

On définit la fonction f par l'équation $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. On va commencer l'étude de f par celle de ses limites et asymptotes.
   (a) Déterminer rigoureusement la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   (b) Étudier le signe de $x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$, et en déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) En posant $x = \dfrac{2}{u}$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$. En déduire la présence d'une asymptote oblique à la courbe réprésentative de f en $+\infty$, dont on précisera l'équation.
3. On va maintenant passer à l'étude des variations.
   (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   (b) On pose $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4}$. Effectuer une étude complète de la fonction g (la courbe n'est pas demandée).
   (c) Déduire de la question précédente que, $\forall x > 0$, $g(x) > 0$, en déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 1 (on donnera si besoin des valeurs approchées de son coefficient directeur et de son ordonnée à l'origine).
5. Tracer la courbe représentative de f ainsi que la tangente calculée à la question précédente dans un même repère.