TD n^o 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 septembre 2018

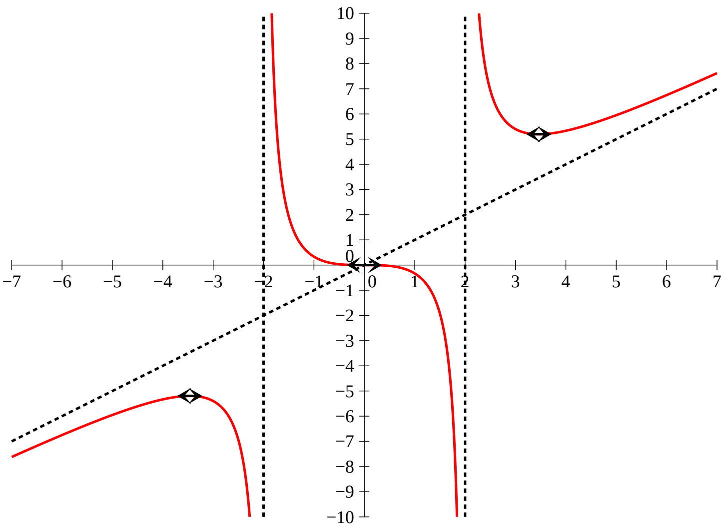
Exercice 1 : un peu de calcul.

1. La méthode la plus simple consiste à effectuer un changement de variable en posant $X = x^2$, pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 3X + 2 = 0$. Cette dernière a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et admet pour solutions $X_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Reste à remonter le changement de variable : $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ et $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.
2. Ici on commence par constater que 1 est solution « évidente » de l'équation : $1^3 - 2 \times 1^2 + 3 - 2 = 0$. On peut alors factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a = 1$; $b - a = -2$, donc $b = -1$; $c - b = 3$ donc $c = 2$ et $-c = -2$, ce qui est cohérent avec la valeur obtenue pour c. Reste à résoudre l'équation produit $(x-1)(x^2 - x + 2) = 0$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 1 - 8 = -7$ et admet donc deux racines complexes $x_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{1, \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}\right\}$.
3. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$ (les valeurs interdites étant les valeurs d'annulation du dénominateur). Sa dérivée est donnée par $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-4) - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \dfrac{x^4 - 12x^2}{(x-2-4)^2} = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$. Les autres facteurs étant toujours positifs, cette dérivée est du signe de $x^2 - 12$. Elle s'annule en particulier lorsque $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$, et sera strictement négative entre ces racines (en excluant naturellement les valeurs interdites de f). Notons que f' s'annule également en 0, même si la dérivée n'y change pas de signe. Calculons en passant $f(2\sqrt{3}) = \dfrac{8 \times 3\sqrt{3}}{12 - 4} = 3\sqrt{3}$. Sans surprise, on obtient $f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$, puisque la fonction f est une fonction impaire (ce qu'on aurait pu constater au début de notre étude pour faire un peu moins de travail).
   On peut maintenant s'intéresser aux limites et éventuelles asymptotes : comme $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \dfrac{x}{1 - \frac{4}{x^2}}$, on peut calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (on peut aussi, plus simplement, invoquer la règle du quotient des termes de plus haut degré pour aller un peu plus vite). Il existe en fait une asymptote oblique à la courbe représentative de f (valable à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$), qu'on peut obtenir via l'astuce de calcul suivante : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x + 4x}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x^2 - 4} = 0$ (encore une fois, on factorise ou on invoque les plus haut degrés pour calculer cette limite). Cette égalité prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à notre courbe. Les autres limites ne posent pas de problème particulier. Le dénominateur $x^2 - 4$ tend bien sûr vers

0 en -2 et en 2, et il est négatif sur $[-2,2]$. Le numérateur, lui, prend une valeur strictement positive en 2, et strictement négative en -2. Les régles de calcul classiques sur les limites permettent donc d'affirmer que $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$. On peut résumer tous ces calculs dans un joli tableau de variations :

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

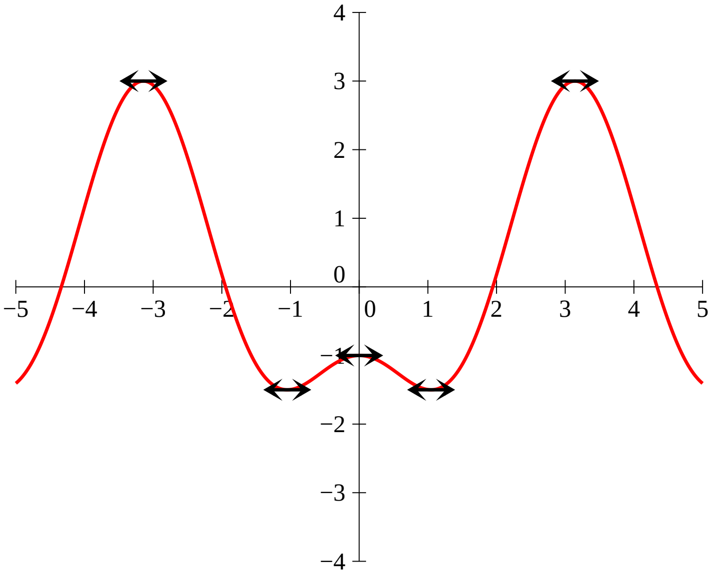
On conclut bien sûr avec un tracé de courbe soigné :



4. La fonction est bien sûr définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est de plus paire (car la fonction cos est paire) et 2π-périodique (là aussi car cos l'est également). On peut donc restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $[0,\pi]$, et compléter la courbe ensuite par symétrie par rapport à (Oy) puis en exploitant la périodicité. La dérivée de notre fonction est donnée par $g'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1 - 2\cos(x))$ (en exploitant la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$; si on ne connait pas cette formule on peut quand même s'en sortir mais le calcul est plus long). Sur $[0;\pi]$, le sinus est toujours positif (mais s'annule en 0 et en π), reste à déterminer le signe de $1 - 2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0\pi]$, se produit sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$. La dérivée change donc de signe en $\frac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. On calcule également $g(0) = 0$ et $g(\pi) = 1 - (-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
h	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

En complétant par symétrie et par périodicité, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2 : une étude de suite.

1. La fonction f est bien définie sur $[0,2]$, de dérivée $f'(t) = \dfrac{2(t+2)-(2t+3)}{(t+2)^2} = \dfrac{1}{(t+2)^2}$. Cette dérivée étant strictement positive, f est strictement croissante sur $[0,2]$. Comme de plus $f(0) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{7}{4}$, on en déduit immédiatement l'encadrement demandé.

2. À l'aide de la question précédente, on peut écrire que, $\forall t \in [0,2]$, $\dfrac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \dfrac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \dfrac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$. On peut intégrer ces inégalités entre 0 et 2 pour obtenir $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_0^2 \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}\,dt$. Or, les deux intégrales se calculent sans problème : $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\,dt = \frac{3}{2}[ne^{\frac{t}{n}}]_0^2 = \frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$, et de même $\displaystyle\int_0^2 \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}\,dt = \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$, ce qui donne l'encadrement de u_n demandé.

3. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, la limite rappelée dans l'énoncé permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n(e^{\frac{2}{n}}-1)}{2} = 1$, ce qui prouve que le membre de gauche de l'encadrement de u_n obtenu à la question précédente converge vers 3, et que le membre de droite de même encadrement converge vers $\dfrac{7}{2}$. Si (u_n) admet une limite finie, cette dernière est donc nécessairement comprise entre 3 et $\dfrac{7}{2}$ (quand deus suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leqslant v_n$ convergent vers les limites respectives l et l', alors $l \leqslant l'$).

4. La vérification est immédiate en mettant au même dénominateur. On peut alors calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt = \int_0^2 2 - \frac{1}{t+2}\,dt = [2t - \ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln(4) + \ln(2) = 4 - \ln(2)$.

5. L'énoncé était incorrect, il manquait un facteur I dans le majorant. On procède en fait comme à la question 2, mais cette fois en encadrant l'exponentielle : $\forall t \in [0,2]$, $1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$ (c'est une conséquence de la croissance de la fonction exponentielle), donc $\dfrac{2t+3}{t+2} \leqslant \dfrac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}} \times \dfrac{2t+3}{t+2}$. On peut intégrer cet encadrement entre 0 et 2 pour obtenir exactement $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}}I$ (puisque, bien entendu, $e^{\frac{2}{n}}$ est une constate pouvant être sortie de l'intégrale).

6. C'est une simple application du théorème des gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$, donc le membre de gauche et le membre de droite de l'encadrement précédent ont pour limite I, ce qui prouve que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = I = 4 - \ln(2)$.

Problème

Partie I.

1. (a) Le facteur devant l'exponentielle étant bien sûr égal à X^2, reste à gérer ce qui se trouve dans l'exponentielle : $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + X$, donc $e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^{1+X} = e \times e^X$. L'égalité demandée en découle immédiatement. Quand x tend vers 1 (nécessairement par valeurs inférieures vu le domaine de définition impose pour f), $\frac{2}{x-1} = -\infty$. Or, $\lim_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$ (c'est un résultat de croissance comparée classique). Par composition de limites, on a donc $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ (le facteur constant $\frac{e}{2}$ ne changeant bien entendu rien).

   (b) On peut cette fois utiliser la forme initiale de f : $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e$. De plus, $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0$, donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   (c) La courbe admettra donc l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

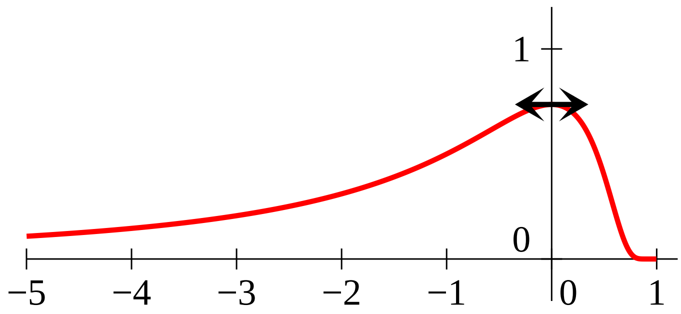
2. (a) La fonction v peut s'écrire sous la forme e^u, en posant $u(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Toutes ces fonctions sont dérivables sur $\mathcal{D}_f$, et $u'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$, donc $v'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

   (b) On dérive tout simplement un produit : $f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^3} e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{-4(x-1)-4}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$, comme prévu.

   (c) L'exponentielle et le dénominateur de f' étant strictement positifs sur $\mathcal{D}_f$, la dérivée calculée à la question précédente est du signe de $-4x$. Elle est donc positive sur $]-\infty, 0]$ et négative sur $[0, 1[$. Le maximum de notre fonction f sera égal à $f(0) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$. On peut résumer cette étude dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

3. Il n'y a pas grand chose de passionnant à indiquer, notons que $\frac{2}{e} \simeq 0.7$:



Partie II.

1. On n'a en fait pas le moindre calcul à faire puisqu'on a calculé tout à l'heure $v'(x) = -f(x)$. Une primitive de f est donc la fonction $-v$ définie par $-v(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
2. C'est un calcul immédiat : $\displaystyle\int_0^a f(x)\ dx = [-v(x)]_0^a = -e^{\frac{a+1}{a-1}} + e^{-1} = \frac{1}{e} - e^{\frac{a+1}{a-1}}$.
3. Puisque $\displaystyle\lim_{a\to 1^-} \frac{a+1}{a-1} = -\infty$, la deuxième exponentielle de la formule précédente a une limite nulle, et $\displaystyle\lim_{a\to 1^-} g(a) = \frac{1}{e}$.
4. Au facteur du à l'unité près, cette aire est égale à $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\ dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx = g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e} - e^{-3} - \frac{1}{e} + e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{e^3}$.

Partie III.

1. Si on tient à rédiger les choses très correctement, la fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^-$, donc effectue une bijection de cet intervalle vers son intervalle image $\left]0, \frac{2}{e}\right]$. Comme $\frac{1}{2}$ appartient à cet intervalle image (car $e < 4 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{e}$), il admet donc un unique antécédent par f sur $\mathbb{R}^-$, ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution négative. Comme $f(-1) = \frac{2}{4}e^0 = \frac{1}{2}$, cette solution est égale à 1. De même, f est strictement monotone sur $[0, 1[$ et bijective de cet intervalle vers $\left]0, \frac{2}{e}\right]$, et on conclut de même à l'existence d'une deuxième solution (positive cette fois) à l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.
2. La méthode la plus classique consiste à faire ce qu'on appelle une dichotomie. On sait déjà que $b \in]0, 1[$. On calcule $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on compare la valeur à $\frac{1}{2}$ pour savoir si $b < \frac{1}{2}$ ou $b > \frac{1}{2}$ (en exploitant bien entendu la décroissance de f sur $]0, 1[$). Ici, en l'occurrence, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8e^{-3} = \frac{8}{e^3} < \frac{1}{2}$ (car $e^3 > 16$), donc $b \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On continue en calculant $f\left(\frac{1}{4}\right)$ pour situer b par rapport à $\frac{1}{4}$, puis on calcule (selon le résultat du calcul précédent) $f\left(\frac{1}{8}\right)$ ou $f\left(\frac{3}{8}\right)$ pour obtenir un encadrement de b de largeur $\frac{1}{8}$. C'est suffisant pour donner une valeur approchée de b à 0.1 près.

3. Le seul cas particulier est $a = 0$, où la valeur maximale $\dfrac{2}{e}$ ne sera prise qu'une fois (donc l'équation $f(x) = f(0)$ admet 0 pour unique solution). Pour tout autre réel $a \in]-\infty, 1[$, l'équation a deux solutions, une dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et l'autre dans l'intervalle $]0, 1[$.