TD n°1

PTSI B Lycée Eiffel

4 septembre 2018

Exercice 1 : un peu de calcul.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.
2. Résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$.
3. Étudier le plus complètement possible la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.
4. Étudier les plus complètement possible la fonction $g : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$.

Exercice 2 : une étude de suite.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}\ dt$.

1. En posant $f(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$, étudier sur l'intervalle $[0, 2]$ les variations de la fonction f. En déduire que, pour tout réel t appartenant à $[0, 2]$, on a $\dfrac{3}{2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{7}{4}$.
2. En déduire que $\dfrac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.
3. On rappelle que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Montrer que, si (u_n) possède une limite finie l, alors $3 \leqslant l \leqslant \dfrac{7}{2}$.
4. Vérifier que $\dfrac{2t+3}{t+2} = 2 - \dfrac{1}{t+2}$, et déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\ dt$.
5. Montrer que $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}}$.
6. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite l.

Problème

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie I.

1. (a) En posant $X = \dfrac{2}{x-1}$, montrer l'égalité $f(x) = \dfrac{e}{2} X^2 e^X$. En déduire la limite de f quand x tend vers 1.
   (b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (c) En déduire une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
2. (a) Soit v la fonction définie par $v(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$. Calculer $v'(x)$.
   (b) Démontrer que $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
   (c) Étudier les variations de f.
3. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$.

Partie II.

1. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$, calculer $g(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\, dx$.
3. Quelle est la limite de $g(a)$ quand a tend vers 1 ?
4. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = -\dfrac{1}{2}$?

Partie III.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est -1. On note b l'autre solution.
2. Proposer une méthode permettant d'obtenir une valeur approché de b à 10^{-1} près.
3. Soit $a \in]-\infty, 1[$ un réel fixé. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$ en fonction de a.