Interrogation Écrite n° 7

PTSI B Lycée Eiffel

6 mai 2019

1. Posons donc $X = \dfrac{1}{x}$, variable qui aura une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$. On peut écrire $f(x) = \left(\dfrac{1}{X} + 1\right) e^X = \dfrac{1+X}{X} \times \left(1 + X + \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{6} + o(X^3)\right) = \dfrac{1}{X} \times \left(1 + X + \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{6} + X + X^2 + \right.$ $\dfrac{1}{X} + 2 + \dfrac{3}{2}X + \dfrac{2}{3}X^2 + o(X^2)$, soit $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x + 2 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit successivement :
   — comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   — comme $f(x) - (x+2) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+2) = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   — de plus, la différence calculée ci-dessus est équivalente à une expression positive au voisinage de $+\infty$, donc elle-même positive dans un tel voisinage, ce qui prouve que $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
2. Soient P et Q deux polynômes appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + Q) = (X^2 - 1)(\lambda P + Q)'' - 2(\lambda P + Q) = \lambda(X^2 - 1)P'' + (X^2 - 1)Q'' - 2\lambda P - 2Q = \lambda f(P) + f(Q)$, ce qui prouve la linéarité de l'application f. De plus, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, P'' est un polynôme constant, donc $(X^2 - 1)P''$ et $2P$ sont tous les deux des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, ce qui prouve que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$, et donc que f est un endomorphisme.
   Posons simplement $P = aX^2 + bX + c$, alors $f(P) = (X^2 - 1) \times 2a - 2(aX^2 + bX + c) = -2bX - 2a - 2c$. Le polynôme P appartient au noyau de f si et seulement si $f(P)$ est nul, donc si $b = -a - c = 0$, soit $P = a(X^2 - 1)$. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X^2 - 1)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme ce dernier espace est lui de dimension 3, le théorème du rang permet de conclure immédiatement que $\mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.
3. (a) L'application f est manifestement un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. De plus, en notant $X = x + 2y + 2z$, $Y = 2x + y - 2z$ et $Z = 2x - 2y + z$, on aura $f \circ f(x,y,z) = \dfrac{1}{9}(X + 2Y + 2Z, 2X + Y - 2Z, 2X - 2Y + Z) = \dfrac{1}{9}(x + 2y + 2z + 4x + 2y - 4z + 4x - 4y + 2z; 2x + 4y + 4z + 2x + y - 2z - 4x + 4y - 2z; 2x + 4y + 4z - 4x - 2y + 4z + 2x - 2y + z) = (x,y,z)$, ce qui prouve que $f \circ f = \mathrm{id}$, et donc que f est une symétrie.
   (b) Le sous-espace F est constitué des vecteurs $u(x,y,z)$ vérifiant $f(x,y,z) = (x,y,z)$, soit en multipliant tout par 3 pour ne pas trainer les facteurs $\dfrac{1}{3}$: $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 3x \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 3y \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3z \end{array}\right.$.
   Les trois équations sont en fait équivalentes à l'unique condition $x - y - z = 0$, donc $F = \{(x, y, x - y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,-1))$. En particulier, F est un plan.
   Pour le sous-espace G, on doit cette fois-ci résoudre l'équation $f(x,y,z) = -(x,y,z)$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & -3x \\ 2x & + & y & - & 2z & = & -3y \\ 2x & - & 2y & + & z & = & -3z \end{array}\right.$, soit $2x + y + z = x + 2y - z = x - y + 2z = 0$.
   En soustrayant les deux dernières équations on trouve $z = y$, donc en remplaçant dans la première équation $x = -z = -y$, et les trois équations sont alors toutes vérifiées. On en

déduit que $G = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, et en particulier G est (sans surprise puisqu'il doit être supplémentaire de F) de dimension 1.

(c) Pas vraiment besoin de calculs : en notant p la projection dont l'énoncé demande l'expression et q la projection sur F parallèlement à G, on sait d'une part que $f = 2q - \mathrm{id}$, et d'autre part que $p + q = \mathrm{id}$, donc $p = \mathrm{id} - q = \dfrac{\mathrm{id} - f}{2}$. On a donc $p(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x,y,z) - \dfrac{1}{2}f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}z; -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}z; -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}z\right) = \dfrac{1}{3}(x - y - z; -x + y + z; -x + y + z)$. On vérifie aisément si on le souhaite que $p \circ p = p$.