Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 6 : corrigé

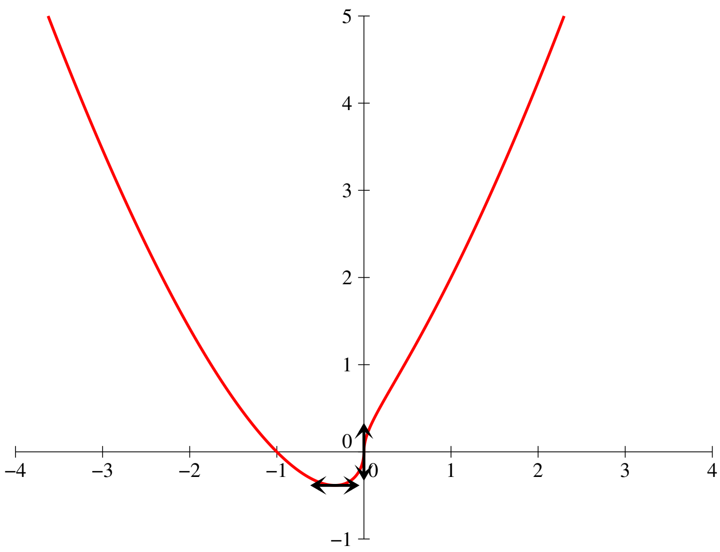
PTSI B Lycée Eiffel

11 février 2019

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et on peut séparer ses deux intervalles de définition pour simplifier les calculs : si $x > 0$, alors $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}} = (x+1)\sqrt{x}$. Si au contraire $x < 0$, alors $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{-x}} = -(x+1)\sqrt{-x}$. La fonction n'admet pas de parité remarquable. Sous la deuxième forme obtenue, on calcule directement (pas de forme indéterminée) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Pour la limite en 0, là encore, la deuxième forme donnée est plus pratique à manipuler et donne immédiatement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (pas de différence entre limites à gauche et à droite). On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Le taux d'accroissement de la fonction prolongée en 0 est défini par $\tau(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x+1}{\sqrt{|x|}}$. Là encore, pas de forme indéterminée, on a immédiatement $\lim\limits_{x\to 0} \tau(x) = +\infty$, ce qui prouve que la fonction prolongée admet en 0 une tangente verticale.
   Reste à effectuer l'étude des variations : sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} > 0$, donc f est strictement croissante. Sur $]-\infty,0[$, f est tout autant dérivable et $f'(x) = -\sqrt{-x} + \dfrac{x+1}{2\sqrt{-x}} = \dfrac{2x+x+1}{2\sqrt{-x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{-x}}$, qui est du signe de $3x+1$. En particulier, la dérivée s'annule pour $x = -\dfrac{1}{3}$, et f admet à cet endroit un minimum de valeur $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ (valeur légèrement supérieure à -0.4 puisque $\sqrt{3} \simeq 1.7$). On peut dresser si on y tient vraiment le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Et surtout, on conclut en traçant une belle courbe, après avoir éventuellement ajouté que la fonction s'annulait quand $x = -1$:



2. On commence bien sûr par passer sous forme exponentielle : $g(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$, on se contentera donc d'étudier la fonction g sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. Comme on connait la limite classique $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = e$, ce qui permet de prolonger la fonction par continuité en posant $g(0) = e$. On s'intéressera à la dérivabilité éventuelle de g en 0 une fois la dérivée calculée. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty$ (pas de forme indéterminée, il faut simplement faire attention au signe), donc $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = +\infty$. Enfin, on peut écrire $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{x}$ pour justifier (en utilisant la croissance comparée) que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$.
La fonction g est dérivable sur chacun de ses deux intervalles de définition, et $g'(x) = h'(x)e^{h(x)}$, où on a posé $h(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. En particulier, ses variations seront les mêmes que celles de la fonction h. Contentons-nous donc de calculer $h'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(x+1)x^2}$. Cette dérivée est du même signe (sur chacun de ses intervalles de définition) que $i(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$. Redérivons cette fonction i pour obtenir $i'(x) = 1 - \ln(1+x) - \dfrac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$. La dérivée i' est donc du signe de $-\ln(1+x)$, soit positive sur $]-1,0[$ et négative sur $]0,+\infty[$. La fonction i est donc croissante sur $]-1,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$, et admet en particulier un maximum en 0 (où elle est définie) qui vaut manifestement 0. Autrement dit, i est toujours négative, et h et g sont donc décroissantes sur les deux intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.
Il ne reste plus qu'à déterminer si notre dérivée admet une limite en 0 (pour pouvoir appliquer le théorème de prolongement de la dérivée le cas échéant). On peut écrire que $h'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x+1-x}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ (et si on naime pas l'astuce belge, on fait une vraie décomposition en éléments simples). Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x+1} = -1$, la limite donnée dans l'énoncé permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$. Comme par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} e^{h(x)} = e$, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\dfrac{e}{2}$, et le théorème de prolongement de la dérivée permet d'affirmer que g prolongée en 0 y est dérivable, et que $g'(0) = -\dfrac{e}{2}$. Le tableau de

variations n'a aucun intérêt (une fois prolongée, la fonction g est simplement décroissante sur $]-1,+\infty[$), contentons-nous de la courbe :