Interrogation Écrite n° 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 janvier 2019

1. Nous allons appliquer un début de pivot de Gauss à la matrice augmentée du système pour rendre ce dernier triangulaire, avant de revenir à une résolution classique du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 1+m & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -m & 3 & m+2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (m+1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & -2-m & 1+m^2 & -(m+1)(m+2) \\ 0 & -m-2 & 1+2m & -(m+2) \end{array}\right) \ L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & -2-m & 1+m^2 & -(m+1)(m+2) \\ 0 & 0 & m^2-2m & -m(m+2) \end{array}\right)$$

Il est temps de revenir au système, qui ne sera de Cramer que si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc si $m \neq 2$ et si $m \neq 0$. Dans ce cas général, la dernière équation du système équivalent obtenu : $m(m-2)z = -m(m+2)$ donne $z = \dfrac{m+2}{2-m}$. La deuxième équation $(-2-m)y + (1+m^2)z = -(m+1)(m+2)$ permet d'obtenir $y = m+1+\dfrac{1+m^2}{2-m} = \dfrac{2m+2-m^2-m+1+m^2}{2-m} = \dfrac{m+3}{2-m}$. Enfin, la première équation $x+y+(1-m)z = m+2$ donne $x = -\dfrac{m+3}{2-m} + \dfrac{(m-1)(m+2)}{2-m} + m+2$, soit $x = \dfrac{-m-3+m^2+m-2+4-m^2}{2-m} = \dfrac{1}{m-2}$. On peut donc conclure que, si $m \notin \{0,2\}$, $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{1}{m-2}, \dfrac{m+3}{2-m}, \dfrac{m+2}{2-m}\right)\right\}$.
Dans le cas où $m = 2$, la dernière équation du système équivalent donne $0z = -8$, donc on a immédiatement $z = 0$. Ensuite, la deuxième équation donne $5z = 0$, qui est évidemment vérifiée, et la première $x+y+3z = 0$, donc $y = -x$. On a donc dans ce cas $\mathcal{S} = \{(x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Enfin, si $m = 0$, cette même équation est toujours vérifiée ($0 = 0$), il nous reste donc les deux équations $x+y+z = 2$ et $-2y+z = -2$. On peut par exemple tout exprimer en fonction de y : on a $z = 2y-2$, puis $x = 2-y-z = 4-3y$, donc $\mathcal{S} = \{(4-3y, y, 2y-2) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) On commence donc par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Pour qu'une relation de la forme $A^2 = aA + bI$ soit possible, il faut que les coefficients en-dehors de la diagonale de A^2 soient multipliés par a par rapport à ceux de A, ce qui impose $a = -1$. On obtient ensuite $b = 2$ en prenant les coefficients sur la diagonale, et on constate aisément qu'en effet, $A^2 = -A + 2I$.

(b) À l'aide de la relation précédente, on a $A^2 + A = 2I$, donc $\frac{1}{2}A(A+I) = I$. On en déduit que la matrice A est inversible et que son inverse est la matrice $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : A^n = a_nA + b_nI$. Elle est vraie au rang 2 d'après la première question, mais aussi pour $n = 0$ en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ (puisque $A^0 = I$) et au rang 1 en posant $a_1 = 1$ et $b_0 = 0$ (avec cette fois $A^1 = A$). Supposons maintenant la relation vérifiée au rang n, alors on peut écrire $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_nA + b_nI) = a_nA^2 + b_nA = a_n(-A + 2I) + b_nA = (b_n - a_n)A + 2a_nI$, ce qui prouve la relation au rang $n+1$, et donne accessoirement les relations de récurrence $a_{n+1} = b_n - a_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(d) D'après les relations données à la question précédente, $a_{n+2} = b_{n+1} - a_{n+1} = 2a_n - a_{n+1}$. La suite (a_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + x - 2 = 0$. Cette équation admet pour racine évident $x_1 = 1$ et pour deuxième racine $x_2 = -2$. On en déduit pour a_n une expression explicite de la forme $a_n = A + B(-2)^n$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions initiales nous donnent $a_0 = 0 = A + B$, donc $B = -A$, et $a_1 = 1 = A - 2B = 3A$, donc $A = \frac{1}{3}$ et $B = -\frac{1}{3}$. On en déduit que $a_n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n)$. Ensuite, on obtient $b_n = 2a_{n-1} = \frac{2}{3}(1 - (-2)^{n-1})$.

(e) On peut donc écrire $A^n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n)A + \frac{2}{3}(1 - (-2)^{n-1})I$. En particulier, $A^6 = \frac{1}{3}(1 - 64)A + \frac{2}{3}(1 + 32)I = 22I - 21A$. Puisqu'on souhaite une forme explicite, calculons $A^6 = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & -63 & 126 \\ 126 & -168 & 252 \\ 63 & -63 & 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 63 & -126 \\ -126 & 190 & -252 \\ -63 & 63 & -62 \end{pmatrix}$.

(f) Si on remplace n par -1 dans l'expression obtenue, on devrait avoir $A^{-1} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right)A + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)I = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I$, ce qui est effectivement exact. On peut en fait vérifier que l'expression reste valable pour tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$.