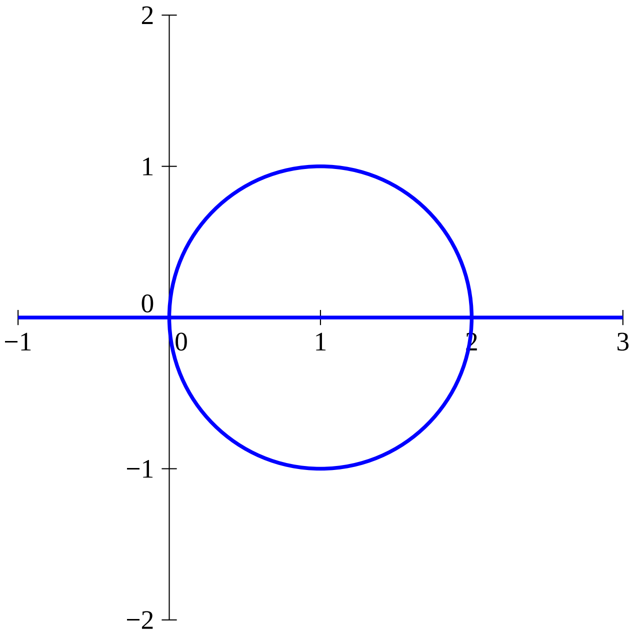
Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 décembre 2018

1. On calcule donc $\left|\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{6+2}{4}} = \sqrt{2}$. On peut donc écrire notre nombre sous la forme $\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$. L'argument recherché vaut donc $-\dfrac{\pi}{6}$. Ensuite, on peut simplement calculer la forme exponentielle de $1-i$: $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On effectue ensuite le quotient : $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2(1-i)} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$. Ce nombre a donc pour module 1 et pour argument principal $\dfrac{\pi}{12}$.
2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique x^2+x-2. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$ et admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$. On en déduit qu'on peut écrire le terme général de la suite (u_n) sous la forme $u_n = A + B\times(-2)^n$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. Déterminons les valeurs des deux constantes à l'aide des conditions initiales : $u_0 = 1 \Leftrightarrow A+B = 1$, et $u_1 = 3 \Leftrightarrow A-2B = 3$. En soustrayant ces deux équations, on obtient $3B = -2$, soit $B = -\dfrac{2}{3}$, et on en déduit que $A = 1+\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$. Autrement dit, $u_n = \dfrac{5+(-2)^{n+1}}{3}$.
3. Commençons par mettre sous forme exeponentielle le nombre $a = 4\sqrt{3}+4i$. On calcule $|a| = \sqrt{48+16} = 8$, puis on écrit $a = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$. En écrivant $z = re^{i\theta}$, l'équation $z^3 = a$ est donc équivalente à $r^2e^{3i\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$. On peut séparer module et argument dans cette égalité : on doit avoir $r^3 = 8$, soit $r = 2$, et $3\theta \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, soit $\theta \equiv \dfrac{\pi}{18}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$. Les trois racines cubiques recherchées sont donc $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{18}}$; $z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{13\pi}{18}}$ et $z_3 = 2e^{i(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{25\pi}{18}}$ (ou $2e^{-i\frac{11\pi}{18}}$ si on veut l'argument principal).
4. On élimine déjà les cas particuliers $z = 0$ et $z = 1$ où deux des trois points sont confondus (et donc forcément alignés). On peut traduire la condition de l'énoncé par l'égalité suivante : $\arg\left(\dfrac{z_P-z_N}{z_M-z_N}\right) \equiv 0[\pi]$, ou si on préfère $\dfrac{z_P-z_N}{z_M-z_N}\in\mathbb{R}$. Autrement dit, on doit avoir $\dfrac{z^2}{z-1}\in\mathbb{R}$. Posons donc $z = a+ib$ et calculons $\dfrac{(a+ib)^2}{a+ib-1} = \dfrac{(a^2-b^2+2iab)(a-1-ib)}{(a-1)^2+b^2}$. Le dénominateur de ce quotient étant réel, il est lui-même réel si et seulement la partie imaginaire de son numérateur est nulle, c'est-à-dire si $-ba^2+b^3+2a^2b-2ab = 0$, ou encore si $b(b^2+a^2-2a) = 0$. La condition $b = 0$ nous donne comme solutions tous les points de l'axe réel (ce qui est évident puisque dans ce cas les trois nombres 1, z et $1+z^2$ sont réels), et la deuxième possibilité peut s'écrire sous la forme $(a-1)^2+b^2 = 1$, où on reconnait le cercle de centre N et de rayon 1. On peut faire un petit dessin pour illustrer :



5. Puisque $f(z) = az + b$, avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{C}$, l'application f est une similitude directe. Comme $a \neq 1$, il ne s'agit pas d'une translation, mais d'une composée d'homothétie et de rotation. En calculant $|a| = \sqrt{2}$ et $\arg(a) = \dfrac{3\pi}{4}$ (calculs immédiats), on a déjà le rapport et l'angle de cette similitude. Il ne reste plus qu'à déterminer l'affixe de son centre en résolvant l'équation $f(z) = z$, soit $z = (i-1)z + 4 + 3i$, ou encore $z(1 - i + 1) = 4 + 3i$. On obtient donc $z = \dfrac{4+3i}{2-i} = \dfrac{(4+3i)(2+i)}{4+1} = \dfrac{8+6i+4i-3}{5} = 1 + 2i$. L'application f est donc une similitude de centre $A(1+2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.