Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 novembre 2018

1. Calcul direct : $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
2. On reconnait la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ qui s'intègre directement : $I_2 = \displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\,dt = [2\sqrt{\ln(t)}]_e^{e^3} = 2\sqrt{3}-2$.
3. On va effectuer une IPP en posant $u'(x) = e^{-x}$, qu'on va primitiver en $u(x) = -e^{-x}$, et $v(x) = x^2+1$, donc $v'(x) = 2x$. On obtient alors $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx = [-(x^2+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}\,dx = -\frac{2}{e}+1+\int_0^1 2xe^{-x}\,dx$. On effectue une deuxième IPP en posant toujours $u'(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = 2x$, donc $v'(x) = 2$. On trouve alors $I_3 + 1 - \dfrac{2}{e} + [-2xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\,dx = 1-\dfrac{2}{e}-\dfrac{2}{e}+[-2e^{-x}]_0^1 = 1-\dfrac{4}{e}-\dfrac{2}{e}+2 = 3-\dfrac{6}{e}$.
4. Puisqu'on nous le propose si gentiment, on pose donc $t = e^x$, soit $x = \ln(t)$ (ce qui est bien bijectif sur l'intervalle d'intégration). Les bornes de l'intégrale deviennent 1 et e, et l'élément différentiel vérifie $dx = \dfrac{1}{t}dt$. On peut donc écrire $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} = \int_1^e \frac{t}{\sqrt{t+1}}\times\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt = [2\sqrt{t+1}]_1^e = 2\sqrt{e+1}-2\sqrt{2}$. Le changement de variable était très superflu puisque cette intégrale pouvait très bien se calculer directement.
5. Un classique qu'on va traiter à l'aide d'une double IPP : on pose pour commencer $u'(t) = u(t) = e^t$ et $v(t) = \sin(t)$, soit $v'(t) = \cos(t)$, pour obtenir $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)e^t\,dt = [e^t\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cos(t)\,dt = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cos(t)\,dt$. On effectue une nouvelle IPP sur l'intégrale restante en posant $u'(t) = u(t) = e^t$, et $v(t) = \cos(t)$, soit $v'(t) = -\sin(t)$. On trouve alors $I_5 = e^{\frac{\pi}{2}} - [e^x\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin(t)\,dt = e^{\frac{\pi}{2}}+1-I_5$. Autrement dit, $2I_5 = e^{\frac{\pi}{2}}+1$, soit $I_5 = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$.
6. Le dénominateur ayant le mauvais goût d'avoir un discriminant négatif, notre seul espoir est de faire apparaitre une arctangente via mise sous forme canonique : $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int_0^1 \frac{4}{3}\times\frac{1}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1}\,dx$ $\left[\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
7. Commençons donc par poser $u = \ln(t)$, ou si on préfère $t = e^u$ (on a le droit, il s'agit bien d'une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration), les bornes de l'intégrale deviennent 1 et 2,

et on aura $du = \dfrac{1}{t}\ dt$, donc $I_7 = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1-\ln(t)}{t(1+\ln(t))}\ dt = \int_1^2 \frac{1-u}{1+u}\ du = \int_1^2 \frac{2-(1+u)}{1+u}\ du = \int_1^2 \frac{2}{1+u} - 1\ du = [2\ln(1+u) - u]_1^2 = 2\ln(3) - 2 - 2\ln(2) + 1 = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1$.