Interrogation Écrite n° 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

1er octobre 2018

1. Toutes ces formules sont bien entendu dans votre cours.
2. Commençons par transformer l'équation à l'aide d'une formule de duplication : $2\cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 = \frac{1}{2}$, soit $2\cos^2(x) + 2\cos(x) - \frac{3}{2} = 0$. On pose $X = \cos(x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2 + 2X - \frac{3}{2} = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$, et qui admet deux solutions réelles $X_1 = \frac{-2-4}{4} = -\frac{3}{2}$, et $X_2 = \frac{-2+4}{4} = \frac{1}{2}$. La valeur X_1 n'étant pas possible pour un cosinus, il ne reste que la possibilité $\cos(x) = \frac{1}{2}$, soit $x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, ou $x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
3. Quitte à tout mettre au même dénominateur, l'équation est équivalente à $4\sin(x)\cos(x)+1 = 0$ (en éliminant bien entendu les valeurs d'annulation du cosinus des solutions possibles de l'équation). On doit donc avoir (formule de duplication du sinus) $2\sin(2x) + 1 = 0$, soit $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$. On en déduit que $2x \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$, ou $2x \equiv -\frac{5\pi}{12}[2\pi]$. On conclut aisément : $x \equiv -\frac{\pi}{12}[\pi]$ ou $x \equiv -\frac{5\pi}{12}[\pi]$.
4. Puisqu'on veut des sinus, employons la formule de duplication idoine pour la première étape : $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x) = 1 - 8\sin^2(x)\cos^2(x) = 1 - 8\sin^2(x) + 8\sin^4(x)$. Lorsque $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$, on a bien sûr $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, donc $\sin^2(x) = \frac{5+1-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$, puis $\sin^4(x) = \frac{9+5-6\sqrt{5}}{64} = \frac{7-3\sqrt{5}}{32}$. On en déduit que, dans ce cas, $\cos(4x) = 1 - (3 - \sqrt{5}) + \frac{7-3\sqrt{5}}{4} = -2 + \sqrt{5} + \frac{7-3\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Ça alors, quelle coïncidence, c'est exactement la valeur de $\sin(x)$! On a donc $\sin(x) = \cos(4x)$, soit $\cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. On en déduit que $4x \equiv \frac{\pi}{2} - x[2\pi]$, ou $4x \equiv x - \frac{\pi}{2}[2\pi]$. La première possibilité donne $x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$. Comme x est l'arcsin d'une valeur strictement positive mais inférieure à $\frac{1}{2}$, on doit avoir $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, ce qui n'est compatible qu'avec l'angle $\frac{\pi}{10}$ dans ce cas. La deuxième possibilité donne $x \equiv -\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$, ce qui ne donne aucun angle dans l'intervalle souhaité. Conclusion $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{\pi}{10}$.
5. Commençons par déterminer le domaine de définition de f. Déjà, la valeur $x = 1$ est manifestement interdite. De plus, on doit avoir $\frac{1+x}{1-x} \in [-1, 1]$, soit si on préfère $\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \leq 1$, ou encore $|1+x| \leq |1-x|$. Autrement dit, x doit être à une plus grande distance de 1 que de -1, ce qui est le cas si x est situé sur la droite réelle à gauche du milieu de l'intervalle $[-1, 1]$, autrement

dit si $x \in \mathbb{R}^-$. On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0]$. La fonction arcsin étant strictement croissante, les variations de f sont les mêmes que celles de $u : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$. Contentons-nous alors de calculer $u'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1+x)^2}$. Cette dérivée étant clairement positive, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ (les puristes noteront que f n'est pas dérivable en 0, il y aura une tangente verticale au point correspondant). De plus, $f(0) = \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+x}{1-x} = -1$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. On constate également facilement que f s'annule pour $x = -1$. Une petite allure de courbe :