Interrogation Écrite n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 septembre 2018

1. J'aurai (strictement) plus de 3 à mon premier résumé de français, donc je sais écrire.
2. Voir le cours.
3. On commence par constater que 2 est une racine évidente de l'équation : $2^3 - 6 \times 2^2 - 13 \times 2 + 42 = 8 - 24 - 26 + 42 = 0$. On peut donc factoriser notre mambre de gauche sous la forme $x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$; $b - 2a = -6$, donc $b = -4$; $c - 2b = -13$ donc $c = -21$, ce qui est cohérent avec la dernière condition. Notre équation est donc équivalente à $(x-2)(x^2 - 4x - 21) = 0$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 + 84 = 100$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{4-10}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{4+10}{2} = 7$. On peut maintenant conclure : $\mathcal{S} = \{-3, 2, 7\}$.
4. Il n'y pas d'autre possibilité que de faire un tableau. On constate déjà que le trinôme $x^2 - 3x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et pour racines $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Quant à $2x - 6$, ça s'annule évidemment pour $x = 3$. On notera dans le tableau $S = |x^2 - 3x + 2| + |2x - 6| - 4$, ce qui revient à dire que l'inéquation à résoudre est $S \leq 0$:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$\lvert x^2 - 3x + 2 \rvert$		$x^2 - 3x + 2$	0	$-x^2 + 3x - 2$	0	$x^2 - 3x + 2$		$x^2 - 3x + 2$	
$\lvert 2x - 6 \rvert$		$6 - 2x$		$6 - 2x$		$6 - 2x$	0	$2x - 6$	
S		$x^2 - 5x + 4$	0	$-x^2 + x$		$-2x^2 - 5x + 4$	-2	$x^2 - x - 8$	

Il reste à résoudre l'inéquation sur chacun des intervalles obtenus :

- sur $]-\infty, 1]$, $S \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0$. Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$, il s'annule pour $x_3 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_4 = \dfrac{5+3}{2} = 4$, et il est négatif entre ces deux racines. Sur notre intervalle de résolution, on conserve $\mathcal{S}_\infty = \{1\}$.
- sur $[1, 2]$, $S \leq 0 \Leftrightarrow x(1-x) \leq 0$, ce qui est vérifié sur $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Dans notre intervalle, on conserve $\mathcal{S}_2 = [1, 2]$.
- sur $[2, 3]$, l'inéquation est la même que sur notre premier intervalle, on conserve cette fois-ci $\mathcal{S}_3 = [2, 3]$.
- enfin, sur $[3, +\infty[$, $S \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 \leq 0$. Cette fois, le trinôme a pour discriminant $\Delta = 1 + 32 + 33$, et pour racines $x_5 = \dfrac{1 - \sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{33}}{8}$, et il est négatif entre ces deux racines. Comme $x_5 < 0$ et $x_6 > 3$ puisque $\sqrt{33} > 5$, on conserve $\mathcal{S}_4 = [3, x_6]$.

Reste à conclure : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = \left[1, \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2}\right]$.