Devoir Commun de Mathématiques : corrigé

PTSI Lycée Eiffel

9 mars 2019

Exercice

1. Les différentes formes de la formule de duplication $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ doivent être bien connues. On peut alors, à l'aide des formules d'addition, écrire $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$. On remplace à l'aide des formules de duplication : $\cos(3x) = (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) = 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
2. Calculons donc les valeurs demandées :
   - $f(1) = |1 - 1 + 2| = 2$.
   - $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = |-1 - e^{i\frac{\pi}{3}} + 2| = \left|1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$.
   - $f(i) = |-i - i + 2| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$.
   - $f(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = |e^{-i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}} + 2| = \left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i + 2\right| = |-\sqrt{2} + 2| = 2 - \sqrt{2}$.
3. Une façon de faire, en utilisant que $|z|^2 = z\overline{z}$: $f(z)^2 = (e^{i3\theta} - e^{i\theta} + 2)(e^{-i3\theta} - e^{-i\theta} + 2) = 1 - e^{i2\theta} + 2e^{i3\theta} - e^{-i2\theta} + 1 - 2e^{i\theta} + 2e^{-i3\theta} - 2e^{-i\theta} + 4 = 6 + 2(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) - 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - (e^{i2\theta} + e^{-i2\theta})$. On applique maintenant les formules d'Euler : $f(z)^2 = 6 + 4\cos(3\theta) - 4\cos(\theta) - 2\cos(2\theta)$. Il est temps d'appliquer les résultats rappelés à la première question : $f(z)^2 = 6 + 16\cos^3(\theta) - 12\cos(\theta) - 4\cos(\theta) - 4\cos^2(\theta) + 2 = 4(4\cos^3(\theta) - \cos^2(\theta) - 4\cos(\theta) + 2) = 4g(\cos(\theta))$.
4. La fonction g étant polynômiale, elle est bien sûr dérivable sur $[-1, 1]$, de dérivée $g'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(6x^2 - x - 2)$. Le trinôme $6x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 48 = 49$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1-7}{12} = -\dfrac{1}{2}$, et $x_2 = \dfrac{1+7}{12} = \dfrac{2}{3}$. Ces deux valeurs étant comprises dans l'intervalle $[-1, 1]$, la dérivée g' s'annule deux fois sur notre intervalle d'étude. On calcule $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{8}\right) - \dfrac{1}{4} + 2 + 2 = 4 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4}$; et $g\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4 \times \dfrac{8}{27} - \dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{3} + 2 = \dfrac{32 - 12 - 72 + 54}{27} = \dfrac{2}{27}$. Par ailleurs, $g(-1) = -4 - 1 + 4 + 2 = 1$ et $g(1) = 4 - 1 - 4 + 2 = 1$, ce qui permet de dresser le tableau de variations suivante :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
g	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	1

5. On a prouvé à la question 3 que, pour tout nombre complexe de module 1 (donc pouvant s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$), on pouvait écrire $f(z)^2 = 4g(\cos(\theta))$, avec bien sûr $\cos(\theta) \in [-1, 1]$. La valeur maximale obtenue pour $f(z)^2$, et donc pour $f(z)$ puisque $f(z)$ est un module, donc toujours un réel positif, est alors obtenue lorsque $g(\cos(\theta))$ est maximal, c'est-à-dire lorsque $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$ d'après l'étude de la question 4. Celà se produit pour deux nombres complexes

distincts : $z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans ces deux cas, on aura, d'après les calculs précédents, $f(z)^2 = \frac{13}{4}$, donc $f(z) = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

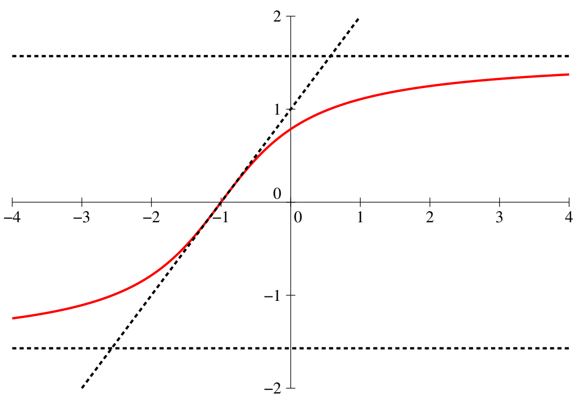
Problème

A. Étude de la fonction f.

1. La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, on a également $\mathcal{D}_f$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions usuelles qui le sont, et $f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (on pouvait même se dispenser du calcul de dérivée en disant simplement que f est la composée de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ en exploitant les limites connues de la fonction arctangente. On peut ajouter que $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ pour dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

3. La courbe de f admet deux asymptotes horizontales d'équations $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$. On a déjà précisé à la question précédente la valeur de $f(0)$. De plus, $f(-1) = \arctan(0) = 0$, et $f'(-1) = \frac{1}{1+0^2} = 1$, donc la tangente à la courbe en son point d'abscisse -1 a pour équation $y = x+1$. Voici une allure de la courbe :



B. Résolution numérique d'une équation.

1. Posons $g(x) = f(x) - x$, la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+(x+1)^2} - 1 = \frac{-(x+1)^2}{1+(x+1)^2}$. Cette dérivée étant toujours négative (et même strictement, sauf en 1 où elle s'annule), la fonction g est strictement décroissante. Comme de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée), la fonction continue g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'équation $g(x) = 0$ admet en particulier une unique solution. Comme cette équation est équivalente à $f(x) = x$, celà répond à la première partie de la question. On calcule ensuite $g(1) = \arctan(2) - 1 > 0$ d'après la valeur approchée de $\arctan(2)$

donnée par l'énoncé, et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arctan\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} < 0$ puisqu'une valeur d'arctangente est de toute façon nécessairement strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$. La stricte décroissance de g assure alors que $1 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. (a) Effectons une démonstration par récurrence : $u_0 = 1 \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ par hypothèse. Supposons maintenant $u_n \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, alors la croissance de f permet de dire que $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\arctan(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant \arctan\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$, ce qui implique $u_{n+1} \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ d'après les remarques exploitées à la question précédente. L'hérédité de notre récurrence est donc vérifiée, et la propriété vraie pour tout entier naturel n.

   (b) Supposons $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2 \leqslant x+1$, donc $4 \leqslant (x+1)^2$ et $5 \leqslant 1+(x+1)^2$. On en déduit immédiatement que $f'(x) \leqslant 15$, soit l'inégalité demandée ($f'(x)$ étant de toute façon toujours positif).

   (c) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $I = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée majorée sur cet intervalle (en valeur absolue) par $\frac{1}{5}$. De plus, $u_n \in I$ et $\alpha \in I$ (preuves effectuées dans les questions précédentes). On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f entre u_n et α pour écrire $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{5}|u_n - \alpha|$. Par définition, $f(\alpha) = \alpha$, donc cette inégalité peut s'écrire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}|u_n - \alpha|$.

   (d) Nous allons maintenant prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5^n}$. Au rang 0, cette inégalité s'écrit $|1-\alpha| \leqslant 1$, ce qui est vrai puisque $0 \leqslant \alpha - 1 \leqslant \frac{\pi}{2} - 1 < 1$ (celà découle encore de l'appartenance de α à I). Supposons maintenant la propriété vérifiée au rang n, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5} \times \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5^{n+1}}$ en appliquant successivement le résultat de la question précédente et l'hypothèse de récurrence. On en déduit donc que $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5^n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, ce qui revient à dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

   (e) La question précédente permet d'affirmer que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-2}$ si $\frac{1}{5^n} \leqslant 10^{-2}$ (condition suffisante mais pas nécessaire pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près). Autrement dit, on prend pour n_0 le plus petit entier vérifiant $5^{n_0} \geqslant 100$, soit $n_0 = 3$ puisque $5^3 = 125$.

3. La fonction g représente tout simplement le taux d'accroissement de la fonction f en α (puisqu'on sait que $f(\alpha) = \alpha$). Par définition, on a donc $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = f'(\alpha) = \frac{1}{1+(\alpha+1)^2}$. Puisque cette limite est finie, on peut prolonger g en une fonction $\tilde{g}$ définie par $\tilde{g}(\alpha) = f'(\alpha)$, et $\tilde{g}(x) = g(x)$ lorsque $x \neq \alpha$.

C. Résolution d'une équation différentielle.

1. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives. Calulons donc une de ces primitives à l'aide d'une intégrale sans bornes : $F(x) = \int \arctan(x+1)\, dx$, on va effectuer une IPP en posant $u'(x) = 1$, qu'on peut primitiver en $u(x) = x$, et $v(x) = \arctan(x+1)$, qui donne $v'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2}$. Les deux fonctions u et v étant certainement de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, l'IPP est justifiée, et donne $F(x) = x\arctan(x+1) - \int \frac{x}{1+(x+1)^2}\, dx = x\arctan(x+$

1)$-\displaystyle\int \frac{x+1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = x\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\ln(1+(x+1)^2)+\arctan(x+1)$ (ce qui se trouve dans le ln étant strictement positif sur $\mathbb{R}$, pas besoin de valeur absolue). On s'est dispensé d'ajouter une constante d'intégration puisqu'on ne recherche qu'une primitive de f. Une fonction convenable est donc définie par $F(x)=(x+1)\arctan(x+1)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)$.

2. Il s'agit d'une équation différentielles homogène du premier ordre. D'après le calcul de primitive précédent, les solutions de cette équation sont de la forme $y : x \mapsto Ke^{F(x)} = K\dfrac{e^{(x+1)\arctan(x+1)}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, avec $K\in\mathbb{R}$. La condition initiale $y(0)=1$ se traduit par $K\dfrac{e^{\arctan(1)}}{\sqrt{2}}=1$, soit $K=\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}$. La fonction recherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par
$y(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}e^{(x+1)\arctan(x+1)}\sqrt{x^2+2x+2}$.

D. Étude d'une somme.

1. Deux méthodes principales sont envisageables.
La première consiste à poser $h(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)-f(x)+f(x-1)$. La fonction h est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$ tout entier), de dérivée $h'(x)=\dfrac{-2x-1}{(1+x+x^2)^2}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{(1+x+x^2)^2}}-f'(x)+f'(x-1)=\dfrac{-2x-1}{1+(1+x+x^2)^2}-\dfrac{1}{1+(x+1)^2}+\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{-2x-1}{1+1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3}-\dfrac{1}{1+x^2+2x+1}+\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}-\dfrac{1}{x^2+2x+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$. On constate que $(x^2+2x+2)(x^2+1)=x^4+2x^3+3x^2+2x+2$, on peut donc prendre cette expression comme dénominateur commun et obtenir comme numérateur $(-2x-1-1-x^2+x^2+2x+2=0$. La dérivée h' est donc nulle, et la fonction h constante sur $\mathbb{R}$. Comme par exemple $h(0)=\arctan(1)-\arctan(1)+\arctan(0)=0$, cette constante est nulle, ce qui prouve l'égalité $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)=\arctan(x+1)-\arctan(x)$.
Deuxième méthode, utiliser un peu de trigonométrie : par définition de la fonction arctangente, on a $\tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)\right)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ (égalité valable pour tout réel x). De plus, $\tan(f(x)-f(x-1))=\tan(\arctan(x+1)-\arctan(x))=\dfrac{x+1-x}{1+(x+1)x}=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ en utilisant la formule d'addition des tangentes $\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$. Nos deux nombres ont donc la même tangente. De plus, si $x\geqslant 1$, $f(x)=\arctan(x+1)\in\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$, et $f(x-1)\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant f(x)-f(x-1)\leqslant\dfrac{\pi}{4}$ (en fait, la fonction f étant croissante, on peut même minorer par 0 au lieu de $-\dfrac{\pi}{4}$). De même, $\dfrac{1}{1+x+x^2}\geqslant 0$, donc $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Comme la fonction tangente est strictement croissante et injective sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$ auquel appartiennent les deux nombres $f(x)-f(x-1)$ et $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$, et que ces deux nombres ont la même tangente, ils sont nécessairement égaux.

2. En exploitant le résultat de la question précédente, on peut écrire $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\arctan(1+k)-\arctan(k)=\sum_{k=2}^{n+1}\arctan(k)-\sum_{k=1}^{n}\arctan(k)=\arctan(n+1)-\arctan(1)$ (on a

une belle somme télescopique). Comme $\lim_{n\to+\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit la convergence de (S_n) vers $\frac{\pi}{4}$.

E. Calcul matriciel.

1. Les fonctions f et f' étant définie sur $\mathbb{R}$, chaque réel admet une image (et une seule!) par u, image qui appartient manifestement à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc u est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. L'application u est injective si et seulement si, pour deux couples de réels (x,y) et (x',y'), $(x,y) \neq (x',y') \Rightarrow u(x,y) \neq u(x',y')$. Or, la fonction f étant elle-même strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est injective. Si $x \neq x'$, on a donc nécessairement $f(x) \neq f(x')$, et les matrices $u(x,y)$ et $u(x',y')$ (quelles que soient les valeurs de y et de y') sont différentes puisqu'elles ont (au moins) un coefficient différent. Le même raisonnement prouve que, si $y \neq y'$, alors $u(x,y) \neq u(x',y')$ pusique dans ce cas c'est le coefficient deuxième ligne première colonne qui sera différent dans les deux matrices. Or, si $(x,y) \neq (x',y')$, celà signifie que soit $x \neq x'$, soit $y \neq y'$. Dans les deux cas, on aura bien $u(x,y) \neq u(x',y')$, l'application u est donc injective.
3. Pour que u soit sujective, il faudrait que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admette (au moins) un antécédent par u dans $\mathbb{R}^2$. Considérons par exemple une matrice M dont le coefficient première deuxième colonne est égal à -1 (peu importe la valeur des autres coefficients de M). Pour pouvoir écrire M sous la forme $u(x,y)$, il faudrait donc en particulier trouver un réel x tel que $f'(x) = -1$, ce qui n'est pas possible puisque f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. L'application u n'est donc pas surjective.
4. (a) On a effectué presque tous les calculs nécessaires dans la partie A, manquait juste $f'(0) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$, donc $A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calulons donc $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{16} & \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'un autre côté, $\left(\frac{\pi}{4}+1\right)A - \frac{\pi}{4}I = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{4}+1 \end{pmatrix} - \frac{\pi}{4}I = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{16} & \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $A^2 = \left(\frac{\pi}{4}+1\right)A - \frac{\pi}{4}I$.

   (c) On va procéder par récurrence sur n. Au rang $n=0$, la propriété est vérifiée en posant simplement $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, puisque $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$. Supposons la propriétée vraie au rang n, alors en exploitant le calcul de la question précédente, on peut écrire $A^{n+1} = A \times A^n = A(x_nA + y_nI) = x_nA^2 + y_nA = x_n\left(\left(\frac{\pi}{4}+1\right)A - \frac{\pi}{4}I\right) + y_nA$, qui est bien de la forme $x_{n+1}A + y_{n+1}I$, en posant $x_{n+1} = \left(\frac{\pi}{4}+1\right)x_n + y_n$, et $y_{n+1} = -\frac{\pi}{4}x_n$. Ceci prouve l'hérédité de la récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

   (d) Si on utilise la méthode proposée par l'énoncé, on constate pour commencer que $u_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = \left(\frac{\pi}{4}+1\right)x_n + y_n - \frac{\pi}{4}x_n = x_n + y_n$ (on a bien sûr utilisé les relations obtenues à la question précédente). La suite (u_n) est donc constant, égale à 1 puisque $u_0 = x_0 + y_0 = 1$.

   Ensuite, $v_{n+1} = \frac{\pi}{4}x_{n+1} + y_{n+1} = \left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\right)x_n + \frac{\pi}{4}y_n - \frac{\pi}{4}x_n = \frac{\pi^2}{16}x_n + \frac{\pi}{4}y_n = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}x_n + y_n\right) = \frac{\pi}{4}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$, donc $v_n = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$.

   Il ne reste plus qu'à retrouver les valeurs de x_n et de y_n : $v_n - u_n = \left(\frac{\pi}{4}-1\right)x_n$, donc

$x_n = \dfrac{4}{\pi - 4}\left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 - 1\right)$; et $y_n = 1 - x_n = 1 - \dfrac{4}{\pi - 4}\left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 - 1\right)$. Alternativement, $\dfrac{\pi}{4}u_n - v_n = \left(\dfrac{\pi}{4} - 1\right) y_n$, donc $y_n = \dfrac{4}{\pi - 4}\left(\dfrac{\pi}{4} - \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n\right) = \dfrac{\pi}{\pi - 4}\left(1 - \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n-1}\right)$.

(e) On sait que $A^n = x_n A + y_n I$, il suffit donc de remplacer par les valeurs obtenues à la question précédentes.

F. Dénombrement.

1. Comme on l'a déjà vu dans la partie A, la fonction f prend toutes les valeurs de l'intervalle ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Les parties entières correspondantes sont comprises entre -2 et 1 (inclus).
2. (a) L'urne contient donc 3 boules portant le numéro -2, 2 boules numérotées -1, une boule avec le numéro 0 et 2 boules avec le numéro 1, soit au total 8 boules.
   (b) Puisqu'on effectue des tirages successifs avec remise, on utilisera des listes. Plus précisément, un tirage correspondra à une 3-liste d'éléments de l'ensemble des 8 boules présentes dans l'urne.
   (c) Le nombre de tirages est donc égal à $8^3 = 512$.
   (d) On peut passer par le complémentaire : le nombre de tirages ne comportant aucune boule numérotée -2 vaut $5^3 = 125$, puisqu'il y a cinq boules dans l'urne qui ne sont pas numérotées -2. La réponse à la question posée est donc $512 - 125 = 387$.
   (e) Il faut choisir les deux boules 1 qui vont être tirées, ce qui peut se faire de $2^2 = 4$ façons différentes (avec l'ordre de ces deux boules imposé par ce choix), choisir la boule tirée pour compléter le tirage (6 possibilités puisqu'il faut éliminer les boules 1 si on veut exactement deux boules 1 au total), et enfin choisir à quel tirage cette boule a été tirée (3 possibilités), soit un nombre de tirages possibles égal à $4 \times 6 \times 3 = 72$.