Devoir Commun de Mathématiques

PTSI Lycée Eiffel

9 mars 2019

Calculatrices interdites.

Une importance particulière (et quelques points) sera attribuée à la qualité de la présentation de la copie et à la qualité de la rédaction.

Exercice

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(z) = |z^3 - z + 2|$, où $z \in \mathbb{C}$. Le but de l'exercice est de déterminer la valeur maximale prise par f lorsque z parcourt l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Exprimer $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, lorsque x est un nombre réel quelconque (on démontrera la formule donnée pour $\cos(3x)$).
2. Calculer $f(z)$ lorsque $z = 1$; $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z = i$ et $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
3. On pose maintenant $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(z)^2 = 4g(\cos(\theta))$, où $g(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$.
4. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[-1, 1]$, et déterminer en particulier son maximum sur cet intervalle.
5. Conclure.

Problème

Dans tout ce problème, on définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x + 1)$.

A. Étude de la fonction f.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de la fonction f, et dresser son tableau de variations complet.
3. Tracer la courbe représentative de f en précisant ses asymptotes éventuelles, son point d'abscisse 0, ainsi que sa tangente en son point d'abscisse -1.

B. Résolution numérique d'une équation.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α, et que $\alpha \in \left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On donne la valeur $\arctan(2) \simeq 1.1$.
2. On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Montrer que, $\forall x \in \left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{5}$.
   (c) En déduire rigoureusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5}|u_n - \alpha|$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.
   (e) Déterminer un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près (on ne demande pas de calculer la valeur de u_{n_0} correspondante).
3. On introduit maintenant la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\arctan(x+1) - \alpha}{x - \alpha} \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en α, et préciser ce prolongement.

C. Résolution d'une équation différentielle.

1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ après avoir justifié son existence.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\begin{cases} y' - f(x)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

D. Étude d'une somme.

On définit dans cette partie la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$, pour tout entier naturel n.

1. Montrer en détaillant le raisonnement effectué que $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) - f(x-1) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$.
2. En déduire la convergence de la suite (S_n), et préciser sa limite.

E. Calcul matriciel.

On considère dans cette partie l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} f(x) & f'(x) \\ f(y) & f'(y) \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. Expliquer rapidement pourquoi u est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. L'application u est-elle injective ?
3. L'application u est-elle surjective ?
4. On note A la matrice $u(0,-1)$.
   (a) Écrire explicitement la matrice A.
   (b) Vérifier que $A^2 = \left(\frac{\pi}{4}+1\right)A - \frac{\pi}{4}I$, où on a noté I la matrice identité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer l'existence de deux suites de réels (x_n) et (y_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = x_nA + y_nI$.
   (d) Expliciter x_n et y_n en fonction de n. Pour cette question, on pourra (mais ce n'est pas une obligation) étudier les deux suites auxiliaires u et v définies par $u_n = x_n + y_n$ et $v_n = \frac{\pi}{4}x_n + y_n$.
   (e) En déduire une forme simplifiée de A^n.

F. Dénombrement.

1. Quelles sont les valeurs prises par $\lfloor f(x) \rfloor$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ (la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne ici la partie entière du réel x) ?
2. On considère une urne contenant, pour chaque entier k correspondant à une des valeurs trouvées à la question précédente, $|k|+1$ boules numérotées k (ainsi, si $k=4$ est une des valeurs trouvées à la question 1, l'urne contiendra 5 boules numérotées 4). On tire successivement et avec remise 3 boules dans cette urne.
   (a) Combien de boules au total l'urne contient-elle ?
   (b) À quel objet mathématique peut-on apparenter un tirage ?
   (c) En déduire le nombre de tirages différents possibles.
   (d) Combien y a-t-il de tirages avec au moins une boule portant le numéro -2 ?
   (e) Combien y a-t-il de tirages avec exactement deux boules numérotées 1 ?