Devoir Surveillé n° 8

PTSI B Lycée Eiffel

18 mai 2019

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 0))$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, et donner l'expression explicite de la projection p sur F parallèlement à G, puis de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 2

On lance plusieurs fois de suite une pièce équilibrée à Pile ou Face. On note P_k l'événement « le k-ème lancer de pièce a donné Pile » et F_k l'événement « le k-ème lancer de pièce a donné Face ». On va chercher dans cet exercice à calculer les probabilités des événements suivants : A_k est réalisé si on tire **pour la première fois** deux Piles successifs aux lancers $k-1$ et k ; B_k est réalisé si on tire pour la première fois un Pile puis un Face aux lancers $k-1$ et k. Ainsi, si les cinq premiers lancers de pièce ont donné les résultats FPPFP, les événements A_3 et B_4 seront réalisés.

1. Déterminer (en justifiant vos calculs) les probabilités des événements A_2, A_3, B_2 et B_3.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{B_3}(A_2)$.
3. On suppose dans cette question que $k \geqslant 3$.
   (a) À quelle condition l'événement $P_1 \cap B_k$ est-il réalisé ?
   (b) Expliquer pourquoi $P(F_1 \cap B_k) = \dfrac{1}{2}P(B_{k-1})$.
   (c) Déduire rigoureusement des questions précédentes que $P(B_k) = \dfrac{1}{2}P(B_{k-1}) + \dfrac{1}{2^k}$.
   (d) En posant $u_k = 2^k P(B_k)$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite (u_n), en déduire la valeur de u_n puis celle de $P(B_k)$.
4. (a) Montrer que $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap P_2)$ forment un système complet d'événements.
   (b) En déduire rigoureusement que, $\forall k \geqslant 4$, $P(A_k) = \dfrac{1}{2}P(A_{k-1}) + \dfrac{1}{4}P(A_{k-2})$.
   (c) Vérifier qu'en posant $P(A_0) = 1$ (même si ça n'a aucun sens !) et $P(A_1) = 0$, la relation précédente s'étend à $k = 2$ et à $k = 3$.
   (d) Calculer la valeur de $P(A_k)$ en fonction de k.

Exercice 3

On note dans cet exercice $E = \mathbb{R}^3$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$.

1. Déterminer la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de E.
2. Calculer le déterminant de la matrice A. Que peut-on en déduire concernant f ?
3. Calculer A^2, puis déterminer une relation entre A^2, A et la matrice identité I. En déduire une expression de la réciproque f^{-1} de f en fonction de f et de id.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - \lambda I)$, et en déduire les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\, id$ n'est pas un automorphisme.
5. Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels $\ker(f - id)$ et $\ker(f - 2\, id)$.
6. Montrer que les deux sous-espaces étudiés à la question précédente sont supplémentaires dans E.
7. (a) Déterminer deux applications linéaires p et q telles que $p + q = id$ et $2p + q = f$ (on les exprimera en fonction de f et de id, pas besoin de donner une expression explicite).
   (b) Vérifier que p et q sont des projecteurs, et que $p \circ q = q \circ p = 0$.
8. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 4

On dispose de deux urnes notées U et V contenant chacune trois boules. Au début de l'expérience, l'urne U contient trois boules blanches et l'urne V trois boules noires. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire une boule dans l'urne U, une boule dans l'urne V, et on échange les deux boules d'urne (ainsi, chaque urne contiendra toujours trois boules). On note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne U au bout de n tirages. On notera par ailleurs Z_n la matrice-colonne $Z_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable X_n (on précisera bien ce qui se passe pour les petites valeurs de n) ?
2. Donner la loi et calculer l'espérance des variables X_1, X_2 et X_3.
3. Calculer toutes les probabilités conditionnelles $P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$, et en déduire rigoureusement l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $Z_{n+1} = M \times Z_n$ (on admettra sans le détailler que cette relation est valable pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$, même lorsque $n = 0$ ou $n = 1$).
4. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^n Z_0$.
5. On introduit dans cette question les matrices $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 9 \\ -3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que S est une matrice inversible (sans chercher à calculer explicitement son inverse).
   (b) Calculer les produits SD et MS.
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = SD^nS^{-1}$.
   (d) En déduire que les coefficients de la matrice M^n convergent quand n tend vers $+\infty$ vers ceux de la matrice STS^{-1}, où la matrice T est une matrice quatre lignes quatre colonnes ayant pour unique coefficient non nul un 1 en bas à droite (on pourra admettre dans cette question que, si une suite de matrices (A_n) « converge » vers A, alors la suite des produits (BA_n) converge vers BA, quelle que soit la matrice B).
6. On note dans cette question a_1, a_2, a_3 et a_4 les quatre coefficients de la dernière ligne de la matrice S^{-1}.
   (a) En exploitant l'égalité $S^{-1}M = DS^{-1}$, montrer que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.
   (b) Montrer que ces quatre coefficients sont en fait égaux à $\dfrac{1}{20}$.
   (c) En déduire l'expression explicite de la matrice STS^{-1}, puis les limites des probabilités $(P(X_n) = k)$ quand n tend vers $+\infty$.
7. On considère dans cette question l'expérience aléatoire suivante (indépendante de celle étudiée dans le reste de l'exercice) : une urne contient trois boules blanches et trois boules noires, et on tire simultanément trois boules dans cette urne. On note X le nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire X. Quel lien y a-t-il avec le reste de l'exercice ?