Devoir Surveillé n° 7b : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 avril 2019

Exercice 1

1. Puisque $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, on peut écrire que $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$. Un équivalent classique permet alors d'affirmer que $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) \sim -\frac{x^2}{6}$. Il ne reste plus qu'à diviser par x^2 pour obtenir $\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \sim -\frac{1}{6}$, la limite recherchée vaut donc $-\frac{1}{6}$.
2. La fonction arcsin est définie au voisinage de 0, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, elle admet donc en 0 un développement limité de la forme $\arcsin(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$. On sait par ailleurs que $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, et bien entendu que $\arcsin(\sin(x)) = x$. En composant les deux développements, on doit donc avoir $x = a\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) + b\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^3 + c\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^5 = ax - \frac{a}{6}x^3 + \frac{a}{120}x^5 + bx^3 - \frac{b}{2}x^5 + cx^5 + o(x^5) = ax + \left(b - \frac{a}{6}\right)x^3 + \left(c - \frac{b}{2} + \frac{a}{120}\right)x^5 + o(x^5)$. L'unicité de la partie régulière du développement limité (en l'occurrence de la fonction identité) assure alors que $a = 1$; $b - \frac{a}{6} = 0$ donc $b = \frac{1}{6}$; et $c - \frac{b}{2} + \frac{a}{120} = 0$ donc $c = \frac{1}{12} - \frac{1}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}$. On retrouve donc le résultat bien connu $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$.
3. On peut aisément constater que la fonction f est bien définie au voisinage de $+\infty$, et on pose comme d'habitude $X = \frac{1}{x}$ pour avoir une variable qui tend vers 0. On calcule alors $f(x) = \frac{1}{X}\sqrt{\frac{\frac{1}{X} - 3}{\frac{1}{X} + 1}} = \frac{1}{X}\sqrt{\frac{1 - 3X}{1 + X}}$. On peut alors écrire $\frac{1 - 3X}{1 + X} = (1 - 3X)(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) = 1 - X + X^2 - X^3 - 3X + 3X^2 - 3X^3 + o(X^3) = 1 - 4X + 4X^2 - 4X^3 + o(X^3)$. En posant $u = -4X + 4X^2 - 4X^3$, on développe alors $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$, soit $\sqrt{\frac{1 - 3X}{1 + X}} = 1 - 2X + 2X^2 - 2X^3 - 2X^2 + 4X^3 - 4X^3 + o(X^3) = 1 - 2X - 2X^3 + o(X^3)$. Autrement dit, $f(x) = \frac{1}{X} - 2 - 2X^2 + o(X^2)$, soit $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - 2 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On en déduit successivement :
   - $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - $f(x) - (x - 2) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^2}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x - 2) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
   - De plus $f(x) - (x - 2)$ est équivalent à une expression négative, donc sera négatif au voisinage de $+\infty$, et la courbe sera donc en-dessous de son asymptote sur ce voisinage.

4. On écrit bien sûr l'expression à développer sous la forme $e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{1}{\cos(x)})}$. En anticipant la division par x, on va développer à l'ordre 4 : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, donc $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ en posant $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, ce qui permet de calculer $\frac{1}{\cos(x)} = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{4}x^4+o(x^4) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$. On passe tout ça dans le ln, en utilisant à nouveau une composée (que je ne rédige pas complètement) : $\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4-\frac{1}{8}x^4+o(x^4) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$. On en déduit que ce qui se trouve dans l'exponentielle initiale a pour développement limité à l'ordre 3 en 0 l'expression $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$. Cette expression tendant vers 0, on peut en faire le développement à l'intérieur de l'exponentielle : $\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 2

1. On calcule bien sûr directement $I_0 = \int_0^2 e^x \, dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1$.

   Ensuite, on va avoir besoin d'une IPP pour calculer $I_1 = \int_0^2 (2-x)e^x \, dx$. On pose $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = 2-x$ pour obtenir $v'(x) = -1$. On a donc $I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 + \int_0^1 e^x \, dx = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3$.

   Enfin, pour I_2, on procède de même : $I_2 = \frac{1}{2}\int_0^2 (2-x)^2 e^x \, dx$. On pose $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = (2-x)^2$ pour obtenir $v'(x) = -2(2-x)$. On a donc $I_1 = \frac{1}{2}[(2-x)^2e^x]_0^2 + \int_0^1 (2-x)e^x \, dx = -2 + I_1 = e^2 - 5$.
2. On l'obtient par la même IPP que précédemment, en posant toujours $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = \frac{(2-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $v'(x) = -\frac{(2-x)^n}{n!}$ (on peut simplifier un facteur $n+1$). On trouve alors $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}[(2-x)^{n+1}e^x]_0^2 + I_n$, soit $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. Lorsque $x \in [0,2]$, on peut écrire que $0 \leqslant (2-x) \leqslant 2$, donc $0 \leqslant (2-x)^n \leqslant 2^n$, et $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^2 \frac{2^n}{n!}e^x \, dx = \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$. Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. Au rang 0, on a $\frac{2^0}{0!} + I_0 = 1 + e^2 - 1 = e^2$ donc la propriété est vraie. Supposons-là vérifiée au rang n, alors $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} + I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2$ par hypothèse de récurrence. La formule est donc vrai pour tout entier naturel n.
5. Puisque I_n tend vers 0, il suffit de passer à la limite dans la relation précédente : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2$.

Exercice 3

1. Posons $f(x) = \tan(x) - x$, la fonction f est définie et dérivable sur chacun des intervalles de la forme $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Sa dérivée $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ étant toujours positive, f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles, et a des limites infinies aux bornes de l'intervalle, donc elle est bijective de $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun des intervalles étudiés. Comme par ailleurs $f(n\pi) = -n\pi < 0$, cette solution se trouve nécessairement dans l'intervalle $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. L'inégalité $u_n \geqslant n\pi$ prouve bien sûr immédiatement que $\lim u_n = +\infty$.

2. Puisque $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $u_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et on a donc $\arctan(\tan(u_n - n\pi)) = u_n - n\pi$, et donc $\arctan(\tan(u_n)) = u_n - n\pi$ par périodicité de la fonction tangente. Autrement dit, $v_n = \arctan(\tan(u_n)) = \arctan(u_n)$ puisque par définition $u_n = \tan(u_n)$. La relation rappelée dans l'énoncé permet alors de conclure que $v_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

3. On sait déjà que $\lim u_n = +\infty$, donc $\lim \frac{1}{u_n} = 0$, de même avec l'arctangente, et $\lim v_n = \frac{\pi}{2}$. Comme par définition $u_n = v_n + n\pi$, on peut écrire $v_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$ puis $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$ (vous en profiterez pour réfléchir à ce que signifie graphiquement ce début de développement, et vous comprendrez alors que c'est essentiellement évident).

4. Attention à bien écrire des développements d'expressions qui tendent vers 0 : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme on connait en 0 le développement de $\arctan(u) = u + o(u^2)$, on peut directement en déduire que $\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et enfin $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. On recommence : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{2\pi^2 n^3} + o(\frac{1}{n^3})}$
$= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 n^3} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^3} - \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{8n^3} - \frac{1}{3\pi^2 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
On met tout ça dans l'arctangente en prenant en compte le terme suivant en $-\frac{1}{3}u^3$:
$\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{8n^3} - \frac{1}{3\pi^2 n^3} - \frac{1}{3\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
Et on conclut : $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3\pi^2} - \frac{1}{3\pi^3}\right)\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.