Devoir Surveillé n° 7a : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 mars 2018

Exercice 0

Le polynôme P a pour racine évidente -1 quelle soit la valeur de la constante α : $P(-1) = -1 + \alpha - \alpha + 1 = 0$. On peut donc le factoriser sous la forme $P = (X+1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (a+b)X^2 + (b+c)X + c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$, puis $a + b = \alpha$, donc $b = \alpha - 1$, $b + c = \alpha$, donc $c = 1$, ce quiest cohérent avec la dernière identification. Intéressons-nous maintenant au polynôme du second degré $X^2 + (\alpha - 1)X + 1$, qui admet pour discriminant $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4 = (\alpha - 3)(\alpha + 1)$ (on factorise directement la différence de deux carrés). On peut alors distinguer plusieurs cas :

- si $\alpha \in]-1, 3[$, $\Delta < 0$ et les deux dernières racines de P sont complexes, ses trois racines étant alors -1, $\dfrac{-\alpha - i\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\dfrac{-1 + i\sqrt{\Delta}}{2}$.
- si $\alpha < -3$ ou $\alpha > 1$, le polynôme P admet trois racines réelles distinctes égales à -1, $\dfrac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\dfrac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$.
- si $\alpha = -1$, le polynôme admet bien sûr toujours pour racine -1, et une racine double égale à 1.
- enfin, si $\alpha = 3$, la racine -1 est en fait triple, ce qui ne surprendra personne puisque dans ce cas on a en effet $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X+1)^3$.

Exercice 1

1. Il s'agit de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$. En soustrayant les équations extrêmes on trouve $2y - t = 0$, soit $t = 2y$. On reporte alors dans la deuxième équation pour trouver $x + 2z = 0$, soit $x = -2z$. On remplace enfin tout ce qu'on peut dans la première équation : $-2z + y + z - 2y = 0$, donc $z = -y$, ce qui donne $x = 2y$, puis $(x, y, z, t) = (2y, y, -y, 2y)$, avec $y \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $F = \text{Vect}((2, 1, -1, 2))$ et en particulier F est un espace vectoriel de dimension 1.
2. On utilise les vecteurs de la base canonique pour compléter (en exploitant le théorème de la base incomplète) :
   (a) le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ n'étant manifestement pas colinéaire avec $(2, 1, -1, 2)$, la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0))$ est toujours libre.
   (b) le vecteur $(0, 1, 0, 0)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a(2, 1, -1, 2) + b(1, 0, 0, 0)$ (les deux équations obtenues pour les deux coordonnées centrales seraient $a = 1$ et $-a = 0$, ce qui est difficilement compatible), donc la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ est encore libre.
   (c) de même, le vecteur $(0, 0, 1, 0)$ n'est pas combinaison linéaire des trois précédents (sinon, avec des notations similaires, on aurait $2a + b = 0$, $a + c = 0$, $-a = 1$ et $2a = 0$, et les deux dernières équations sont incompatibles), donc la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$

est libre, et forme donc une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'elle est consituée de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4.

3. Partons donc d'une combinaison linéaire annulant ces trois vecteurs : $a(1,1,-1,1)+b(-1,-2,3,7)+c(4,4,-5,-3)=0$. On est donc ramenés à la résolution du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & 4c & = & 0 \\ a & - & 2b & + & 4c & = & 0 \\ -a & + & 3b & - & 5c & = & 0 \\ a & + & 7b & - & 3c & = & 0 \end{array}\right.$.
L'opération $L_1 - L_2$ donne immédiatement $b = 0$, et on a alors $a + 4c = -a - 5c = 0$, ce qui implique $c = 0$ puis $a = 0$. La seule solution du système est donc la solution triviale, la famille est donc libre. Comme elle est génératrice de G et constituée de trois vecteurs, on en déduit que $\dim(G) = 3$.
4. Chacun des vecteurs de la base de G étudiée à la question précédente vérifie l'équation de H : $2+6-7-1 = -2-12+21-7 = 8+24-35+3 = 0$, donc ces trois vecteurs appartiennent à H, et leurs combinaisons linéaires également (H étant défini par une équation linéaire homogène, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$). On a donc nécessairement $G \subset H$. Or, on peut écrire, en « résolvant » l'équation le définissant, que $H = \text{Vect}((1,0,0,2);(0,1,0,6);(0,0,1,7))$, et en déduire que H est également un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3. Si $G \subset H$ et que les deux espaces ont la même dimension, on a nécessairement $H = G$.
5. On sait déjà que $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. De plus, le vecteur $(2,1,-1,2)$ ne vérifie pas l'équation de H : $4 + 6 - 7 - 2 \neq 0$, donc $(2,1,-1,2) \notin G$ (on a vu précédemment que $G = H$) et ses multiples n'appartiennent pas non plus à G, ce qui suffit à prouver que $F \cap G = \{0\}$. Cei suffit à prouver que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
6. Plutôt que de prendre la famille donnée dans l'énoncé comme base de G, on prendra (c'est plus facile pour les calculs) la base de H (et donc de G) obtenue ensuite. On cherche donc à écrire u sous la forme $v+w$, avec $v = a(2,1,-1,2) \in F$, et $w = b(1,0,0,2)+c(0,1,0,6)+d(0,0,1,7) \in G$. Celà revient à résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2a & + & b & & & & & = & x \\ a & & & + & c & & & = & y \\ -a & & & & & + & d & = & z \\ 2a & + & 2b & + & 6c & + & 7d & = & t \end{array}\right.$. On en déduit que $b = x - 2a$; $c = y - a$ et $d = z + a$. En remplaçant dans la dernière équation, $2a + 2x - 4a + 6y - 6a + 7z + 7a = t$, soit $a = 2x + 6y + 7z - t$, dont on déduit ensuite $b = -3x - 12y - 14z + 2t$; $c = -2x - 5y - 7z + t$ et $d = 2x + 6y + 8z - t$. Autrement dit, on a $v = (4x + 12y + 14z - 2t, 2x + 6y + 7z - t, -2x - 6y - 7z + t, 4x + 12y + 14z - 2t)$, et $w = (-3x - 12y - 14z + 2t, -2x - 5y - 7z + t, 2x + 6y + 8z - t, -4x - 12y - 14z + 3t)$.

Exercice 2

1. Allons-y pour la vérification :
   - F est non vide puisqu'il contient (entre autres) la matrice nulle, mais aussi la matrice identité ou même A elle-même.
   - F est stable par produit extérieure : si $AM = MA$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA$.
   - F est stable par somme : si $AM = MA$ et $AN = NA$, alors $A(M+N) = AM + AN = MA + NA = (M+N)A$.

   Notre ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Posons brutalement $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $AM = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix}$, et $MA = \begin{pmatrix} a+2b & 3a-b \\ c+2d & 3c-d \end{pmatrix}$.

Les deux matrices sont donc égales si $\left\{\begin{array}{lcl} 3c-2b & = & 0 \\ 2b+3d-3a & = & 0 \\ 2a-2c-2d & = & 0 \\ 2b-3c & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes sont identiques et donnent $b = \frac{3}{2}c$. En remplaçant dans la deuxième équation, celle-ci devient alors équivalente à la troisième : $a - c - d = 0$, soit $a = c + d$. On ne peut pas faire mieux que garder les deux inconnues c et d variant dans $\mathbb{R}$, donc les matrices appartenant à F sont de la forme $\begin{pmatrix} c+d & \frac{3}{2}c \\ c & d \end{pmatrix}$. Autrement dit, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices formant la famille génératrice de F étant manifestement non proportionnelles, elle forment une base de F, qui est donc de dimension 2.

3. On sait déjà que I (qui est d'ailleurs l'une des deux matrices formant la base de F obtenue à la question précédente) et A (qui commute de façon triviale avec elle-même) appartiennent à F. Comme il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires (c'est évident) dans un espace de dimension 2, la famille (I, A) est nécessairement une base de F. C'est exactement le même raisonnement pour (A, A^2), en constatant que $A^2 = 7I$ (calcul immédiat).
4. Notons $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, même pas la peine de calculer AN et NA pour prouver que $N \in F$, il suffit de constater que $N = A - 3I$. Étant combinaison linéaire de matrices de F, N est elle-même dans F et admet pour coordonnées $(-3, 1)$ dans la base (I, A). Bien sûr, on a donc $N = A - \frac{3}{7}A^2$, donc N a pour coordonnées $\left(1, -\frac{3}{7}\right)$ dans la base (A, A^2).

Exercice 3

1. On a donc $P_0 = 1$ et $L_0 = P_0 = 1$; puis $P_1 = X^2 - 1$ et $L_1 = P_1' = 2X$; $P_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = P_2'' = 12X^2 - 4$; et enfin $P_3 = (X^2-1)^3 = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$ et $L_3 = P_3^{(3)} = 120X^3 - 72X$.
2. Le polynôme P_n est par définition de degré $2n$ et de terme dominant X^{2n} (si on développe brutalement à coup de binôme de Newton, le terme de plus haut degré de $(X^2-1)^n$ vaut en effet X^{2n}). En dérivant n fois, on retombera donc sur un polynôme de degré n (même lorsque $n = 0$ ça marche) et de terme dominant $(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1)x^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n$, le coefficient dominant de L_n vaut donc $\frac{(2n)!}{n!}$ (ce qu'on peut vérifier pour $n \leqslant 3$ à l'aide des calculs de la première question).
3. Question assez stupide, P_n est pair comme puissance d'un polynôme pair. En fait c'est plus intéressant pour L_n : comme la dérivée change la parité du polynôme (dériver un polynôme pair donne un polynôme impair et vice versa), dériver n fois va donner un polynôme impair pour L_n si n est impair, et pair si n est pair (ce qui est cohérent avec les calculs de la première question).
4. Posons donc $f(x) = (x-1)^n$ et $g(x) = (x+1)^n$. Par récurrence essentiellement triviale (on a déjà vu ces calculs dans des exercices), on prouve que, pour tout entier $k \leqslant n$, on a $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}$, et $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}$ (par exemple pour f : c'est vrai au rang 0 car $\frac{n!}{(n-0)!}(x-1)^{n-0} = (x-1)^n = f(x)$, et si on suppose la formule vraie au rang k, en dérivant une fois de plus, on aura $f^{(k+1)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times (n-k)x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $n+1$). Comme $P_n = (X^2-1)^n = (X+1)^n(X-1)^n = f \times g$, on peut appliquer la formule de Leibniz à la dérivée n-ème pour en déduire que

$$L_n = P_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{k!} (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

Si on évalue cette somme lorsque $X = 1$, le seul terme de la forme $(X-1)^{n-k}$ qui ne s'annule pas est celui obtenu lorsque $k = n$, et on a donc $L_n(1) = 1 \times n! \times 1 \times 1 \times 2^n = 2^n n!$. Même raisonnement pour -1, mais cette fois c'est le terme obtenu lorsque $k = 0$ qui ne s'annule pas et qui donne $L_n(-1) = n! \times (-2)^n = (-1)^n 2^n n!$ (on pouvait aussi exploiter la parité de L_n pour déduire la valeur de $L_n(-1)$ de celle de $L_n(1)$).

5. Par définition, $P_{n+1} = (X^2-1)^{n+1}$, donc en dérivant simplement, $P'_{n+1} = (n+1)2X(X^2-1)^n = 2(n+1)XP_n$.
6. Si on dérive à nouveau la relation précédente, on a $P''_{n+1} = 2(n+1)P_n + 2(n+1)XP'_n$. Or, en décalant la relation précédent, on sait que $P'_n = 2nXP_{n-1}$, donc $P''_{n+1} = 2(n+1)P_n + 4(n^2+n)X^2P_{n-1}$, ce qu on peut encore écrire $P''_{n+1} = (2n+2)P_n + (4n^2+4n)(X^2-1)P_{n-1} + (4n^2+4n)P_{n-1} = (4n^2+6n+2)P_n + (4n^2+4n)P_{n-1}$, en se débarassant ainsi de l'indéterminée X dans la relation de récurrence.
7. Si on dérive n la première relation obtenue $P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n$, on peut appliquer la formule de Leibniz au produit de X (qui a bien entendu des dérivées nulles dès le rang 2) et de P_n pour obtenir $P_{n+1}^{(n+1)} = 2(n+1)XP_n^{(n)} + 2(n+1)nP_n^{(n-1)}$, soit $L_{n+1} = (2n+2)XL_n + (2n^2+2n)P_n^{(n-1)}$ (relation numérotée 1 pour la suite). On peut également dériver $n-1$ la relation obtenue à la question précédente $P''_{n+1} = (4n^2+6n+2)P_n + (4n^2+4n)P_{n-1}$ pour trouver $L_{n+1} = (4n^2+6n+2)P_n^{(n-1)} + (4n^2+4n)L_{n-1}$ (relation numérotée 2). Multiplions maintenant la relation 1 par $2n+1$ avant de lui soustraire la relation 2 multipliée par n, histoire déliminer les termes en $P_n^{(n-1)}$, et on trouve $(2n+1)L_{n+1} - nL_{n+1} = (4n^2+6n+2)XL_n - (4n^3+4n^2)L_{n-1}$, soit en simplifiant tout par le facteur commun $n+1$: $L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}$, formule qui permet de calculer aisément les polynômes L_n par récurrence.