Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7 (première partie)

PTSI B Lycée Eiffel

25 mars 2018

Exercice 0

Déterminer les racines du polynôme $P = X^3 + \alpha X^2 + \alpha X + 1$, où α est une constante réelle fixée (on distinguera des cas si besoin).

Exercice 1

On définit dans $E = \mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t = x - 2y + 2z + t = x - y + z = 0\}$; $G = \text{Vect}((1, 1, -1, 1); (-1, -2, 3, 7); (4, 4, -5, -3))$.

1. Déterminer une base de F et préciser la dimension de ce sous-espace vectoriel.
2. Compléter la base obtenue pour F en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. La famille $((1, 1, -1, 1); (-1, -2, 3, 7); (4, 4, -5, -3))$ est-elle une famille libre de vecteurs de E ? En déduire la dimension de G.
4. On note $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 6y + 7z - t = 0\}$. Vérifier que $H = G$.
5. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
6. Soit $u(x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de E. Exprimer u comme somme de deux vecteurs v et w appartenant respectivement à F et à G.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et A une matrice fixée appartenant à $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer (en revenant à la définition) que $F = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F.
3. Montrer que la famille (I, A) est une base de F. Vérifier que la famille (I, A^2) est aussi une base de F.
4. Vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à F et déterminer ses coordonnées dans chacune des deux bases évoquées à la question précédente.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on définit les polnynômes P_n et L_n par $P_n = (X^2-1)^n$, et $L_n = P_n^{(n)}$ (dérivée n-ème du polynôme P_n).

1. Calculer explicitement les polynômes P_n et L_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme L_n.
3. Que peut-on dire de la parité des polynômes P_n (on justifiera la réponse) ?
4. En appliquant la formule de Leibniz au produit $(X-1)^n \times (X+1)^n$, déterminer les valeurs de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
5. Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n$.
6. Exprimer le polynôme P''_{n+1} en fonction de P_n et de P_{n-1}.
7. Exploiter les deux relations obtenues aux questions précédentes pour trouver une relation de récurrence reliant L_{n+2}, L_{n+1} et L_n.