Devoir Surveillé n° 5

PTSI B Lycée Eiffel

28 janvier 2018

Exercice 1

Une urne contient 20 jetons distinguables : cinq portent le numéro 9, deux portent le numéro 6, six portent le numéro 0, quatre portent le numéro 1 et trois portent le numéro 2. On ne demande pas d'effectuer les applications numériques. On justifiera par contre les réponses proposées pour chaque question posée.

1. On tire quatre jetons dans l'urne successivement avec remise et on les aligne dans l'ordre dans lequel on les a tirés.
   (a) Combien de tirages différents peut-on effectuer ?
   (b) Combien de tirages permettent d'obtenir le nombre 2019 une fois les jetons alignés ?
   (c) Combien de tirages pour lesquels on tirera exactement deux fois le chiffre 9 ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels on aura un nombre divisible par 3 ?
2. On effectue désormais un seul tirage de quatre jetons dans l'urne (les jetons sont donc tirés simultanément).
   (a) Combien de tirages différents peut-on effectuer ?
   (b) Combien de tirages à partir desquels on peut former le nombre 2019 avec les chiffres tirés ?
   (c) Combien de tirages pour lesquels on tirera exactement deux fois le chiffre 9 ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels les nombres qu'on peut former avec les chiffres tirés sont divisibles par 3 ?

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à étudier le comportement de la suite (u_n) définie de la façon suivante : u_n est l'unique solution positive de l'équation $nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1$. On posera à cet effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n$.

1. Déterminer la valeur de u_1.
2. Effectuer l'étude de la fonction f_n sur $]0, +\infty[$, et en déduire l'existence d'une unique solution à l'équation $f_n(x) = 1$ sur cet intervalle.
3. Montrer l'encadrement $1 + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$, montrer que la suite définie par $v_n = \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n$ converge, et préciser sa limite.
5. En déduire que la suite $\left(f_n\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)\right)$ converge vers une limite à préciser.
6. Montrer que l'équation $(x-1)e^x = 1$ admet une solution unique que l'on notera α, puis prouver que $\alpha \in]1, 2[$.
7. Soit un réel ε tel que $0 < \varepsilon < \alpha - 1$.
   (a) Que valent les limites $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n}\right)$?

(b) Prouver qu'il existe un entier n_0 à partir duquel on a l'encadrement $1+\dfrac{\alpha-\varepsilon}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\dfrac{\alpha+\varepsilon}{n}$.

(c) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n-1)$.

Exercice 3

On considère dans cet exercice la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et M^3. Déterminer une relation entre M^3, M et I.
2. En déduire que M est une matrice inversible, et donner son inverse M^{-1} (on donnera la matrice explicite).
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$.
4. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, et en déduire la valeur de M^n.
5. La formule obtenue à la question précédente reste-t-elle valable lorsque $n=-1$?
6. Retrouver l'expression de la matrice M^{-1} à l'aide d'un pivot de Gauss (sur les matrices ou sur un système).

Exercice 4

On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$; $v_n = n!u_n$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{\binom{n}{k}}$.

1. Calculer les valeurs prises par ces trois suites pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$.
2. Expliquer pourquoi $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{n!}{\binom{n}{k}}$. En déduire que $w_n = \dfrac{nv_n}{2}$.
3. Montrer en exploitant le résultat de la question précédente que $u_{n+1} = 1+\dfrac{n+2}{2n+2}u_n$.
4. En déduire les valeurs de u_5, u_6 et u_7.
5. On pose enfin $t_n = \dfrac{2^n u_n}{n+1}$. Déterminer une relation entre t_{n+1} et t_n.
6. En déduire que $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k+1}$.

Exercice 5

Pour tout réel $t \neq 0$, on définit $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix}$.

1. Si s et t sont deux réels non nuls, à quelle condition les matrices A_s et A_t commutent-elles ?
2. Calculer $(A_s+A_t)^2$. En déduire que $(A_s+A_t)^{2n} = (-1)^n\dfrac{(s-t)^{2n}}{(st)^n}I$.
3. On pose $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(A_t+A_{2t})^{2k}$. Simplifier l'expression de M_n et étudier sa limite quand n tend vers $+\infty$ (on rappelle qu'une suite de matrices converge si et seulement si chacun de ses coefficients admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$).
4. Démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$, valable pour tout entier $k \geqslant 1$.
5. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(A_k+A_{k+1})^2$. Étudier la convergence de la suite de matrices (P_n).