Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 décembre 2018

Exercice 0

1. Le plus simple est de commencer par constater que $z=-1$ est une racine évidente de notre polynôme : $-1+3i-3+3+4i+1-7i=0$. On peut donc factoriser le membre de gauche de notre équation sous la forme $z^3+(3i-3)z^2-(3+4i)z+1-7i=(z+1)(az^2+bz+c)=az^3+(a+b)z^2+(b+c)z+c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a=1$, puis $a+b=3i-3$ dont on déduit $b=3i-4$, et $b+c=-3-4i$ dont on déduit $c=1-7i$, ce qui est cohérent avec la dernière équation donnée par le coefficient constant. Résolvons maintenant l'équation du second degré $z^2+(3i-4)z+1-7i=0$, qui admet pour discriminant $\Delta=(3i-4)^2-4(1-7i)=-9-24i+16-4+28i=3+4i$. On cherche les racines carrées de ce discriminant sous la forme $\delta=a+ib$. On doit avoir $\delta^2=\Delta$, donc $a^2-b^2=3$ et $2ab=4$ en séparant parties réelle et imaginaire. De plus, l'égalité des modules donnes $|\delta|^2=a^2+b^2=|\Delta|=\sqrt{9+16}=5$. En ajoutant cette équation à la première obtenue, on trouve $2a^2=8$, donc $a=\pm 2$. En la soustrayant à cette même équation, on trouve $2b^2=2$, donc $b=\pm 1$. La condition $2ab=4$ imposant que a et b soient de même signe, on peut par exemple prendre $\delta=2+i$. Les deux solutions de notre équation du second degré sont donc $z_1=\dfrac{3i-4+2+i}{2}=-1+2i$, et $z_2=\dfrac{3i-4-2-i}{2}=-3+i$. En revenant à l'équation initiale, on a donc $\mathcal{S}=\{-1;-1+2i;-3+i\}$.
2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x=-2x+6$ admet pour solution $x=2$. On définit donc la suite auxiliaire (v_n) par $v_n=u_n-2$ et on vérifie qu'elle est géométrique : $v_{n+1}=u_{n+1}-2=-2u_n+4=-2v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0=u_0-2=1$, donc $v_n=(-2)^n$, et $u_n=v_n+2=2+(-2)^n$.
3. Commençons donc par linéariser le produit à l'aide des formules d'Euler : $\cos^3(x)\sin(x)=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\times\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\dfrac{(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})(e^{ix}-e^{-ix})}{16i}$ $=\dfrac{e^{4ix}+2e^{i2x}-2e^{-2ix}-e^{-4ix}}{16i}=\dfrac{1}{8}\sin(4x)+\dfrac{1}{4}\sin(2x)$. On peut maintenant calculer notre intégrale sans problème : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3(x)\sin(x)\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)\ dx$ $=\left[-\dfrac{1}{32}\cos(4x)-\dfrac{1}{8}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{15}{64}$.

Exercice 1

1. Calculons donc $f(i)=\left|1-i-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1}{2}-i\right|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Pour $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$, on peut déjà signaler que $z^2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}})=\left|1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right|=\left|\dfrac{1}{4}-i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{16}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

2. Un module étant toujours positif, l'inégalité $f(z) \geqslant 0$ est immédiate. Pour l'autre, on peut simplement appliquzr l'inégalité triangulaire : $f(z) \leqslant |1| + |z| + \dfrac{|z|^2}{2} = \dfrac{5}{2}$.
3. Si z est de module 1, on a $a^2 + b^2 = 1$. On peut alors écrire $z = a^2 - b^2 + 2iab$, soit $\text{Re}(z^2) = a^2 - b^2 = a^2 - (1 - a^2) = 2a^2 - 1$.
4. En posant bêtement $z = a+b$, on a $f(z)^2 = \left|1 - a - ib + \dfrac{1}{2}((2a^2 - 1)) + iab\right|^2 = \left(\dfrac{1}{2} - a + a^2\right)^2 + b^2(a-1)^2 = \dfrac{1}{4} + a^2 + a^4 - a + a^2 - 2a^3 + (1 - a^2)(a^2 - 2a + 1) = a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + \dfrac{1}{4} + a^2 - 2a + 1 - a^4 + 2a^3 - a^2 = 2a^2 - 3a + \dfrac{5}{4}$. On va donc poser $P(a) = 2a^2 - 3a + \dfrac{5}{4}$.
5. Le polynôme P admet pour dérivée $P'(a) = 4a - 3$, qui s'annule pour $a = \dfrac{3}{4}$. Notre polynôme est donc décroissant sur $\left[-1, \dfrac{3}{4}\right]$ et croissant sur $\left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$. En particulier, il admet pour minimum $P\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2 \times \dfrac{9}{16} - \dfrac{9}{4} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{8}$. De plus, $P(-1) = 2 + 3 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{25}{4}$, et $P(1) = 2 - 3 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{4}$, donc le maximum atteint par P sur l'intervalle $[-1, 1]$ est $\dfrac{25}{4}$.
6. Par définition, $f(z) = \sqrt{P(a)}$, pour une valeur de a comprise entre -1 et 1, puisqu'un nombre complexe de module 1 a une partie réelle qui est forcément comprise entre -1 et 1. On en déduit, en exploitant les résultats de la question précédente, que $\dfrac{1}{8} \leqslant f(z)^2 \leqslant \dfrac{25}{4}$, donc que $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant f(z) \leqslant \dfrac{5}{2}$. La borne supérieure est atteinte lorsque $z = -1$, la borne inférieure lorsque $\text{Re}(z) = \dfrac{3}{4}$, donc $\text{Im}(z)^2 = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$. Il y a deux valeurs qui collent : $z = \dfrac{3}{4} \pm i\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

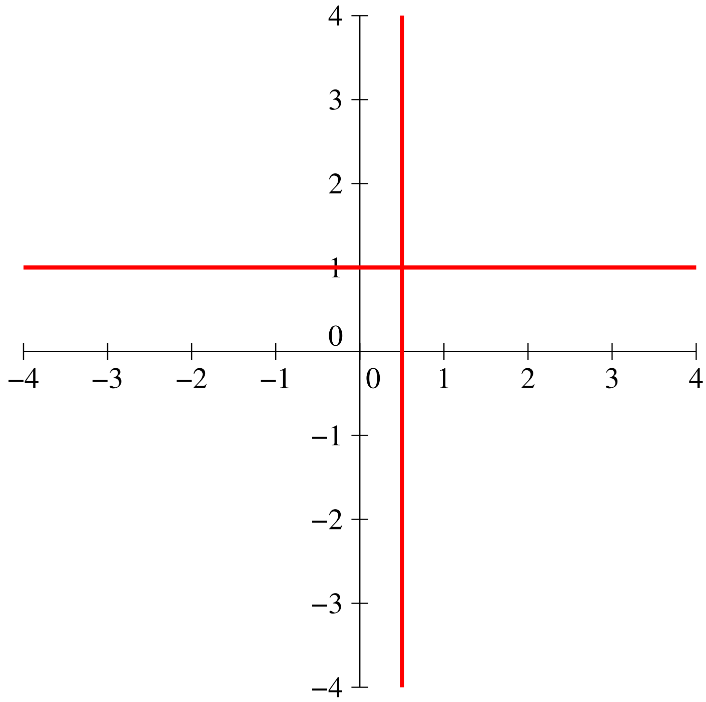
Exercice 2

1. On a $f(1) = -\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{-i(1-i)}{2} = \dfrac{-1-i}{2}$. La forme exponentielle se calcule aisément : $|-1-i| = \sqrt{2}$, et $f(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.
   Ensuite, $f(1+3i) = \dfrac{2i}{1-2i} = \dfrac{2i(1+2i)}{1+4} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i$.
   Enfin, $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = f\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{1 + \sqrt{3}i - 2 - 2i}{1 - \sqrt{3}i + 2i} = \dfrac{-1 + i(\sqrt{3} - 2)}{1 + i(2 - \sqrt{3})} = -1$ puisque numérateur et dénominateur sont manifestement opposés (on a tout multiplié par deux en haut et en bas en cours de calcul pour simplifier).
2. Résoudre l'équation $f(z) = 1$ revient à résoudre $z - 1 - i = \overline{z} + i$, soit $z - \overline{z} = 1 + 2i$. Or, on sait très bien que $z - \overline{z}$ est un nombre imaginaire pur, il ne peut donc pas être égal à $1 + 2i$. Le nombre 1 n'a pas d'antécédent par f.
   De même, le calcul des antécédents de 2 se ramène à l'équation $z - 1 - i = 2\overline{z} + 2i$, soit $z - 2\overline{z} = 1 + 3i$. En posant $z = a + ib$, on calcule $z - 2\overline{z} = a + ib - 2a + 2ib = -a + 3ib$. Une identification des partie réelle et imaginaire des deux membres de l'équation donne alors $-a = 1$ et $3b = 3$, donc $z = -1 + 3i$ est l'unique antécédent de 2 par f.
   Enfin, les antécédents de $2 - i$ sont obtenus en résolvant $z - 1 - i = (2 - i)\overline{z} + 2i + 1$, soit $z + (i - 2)\overline{z} = 2 + 3i$. On pose à nouveau $z = a + ib$ et on calcule $z + (i-2)\overline{z} = a + ib + (i - 2)(a - ib) = a + ib + ia + b - 2a + 2ib = b - a + i(a + 3b)$. L'identification nous donne cette fois-ci $b - a = 2$ et $a + 3b = 3$. En additionnant par exemple les deux équations,

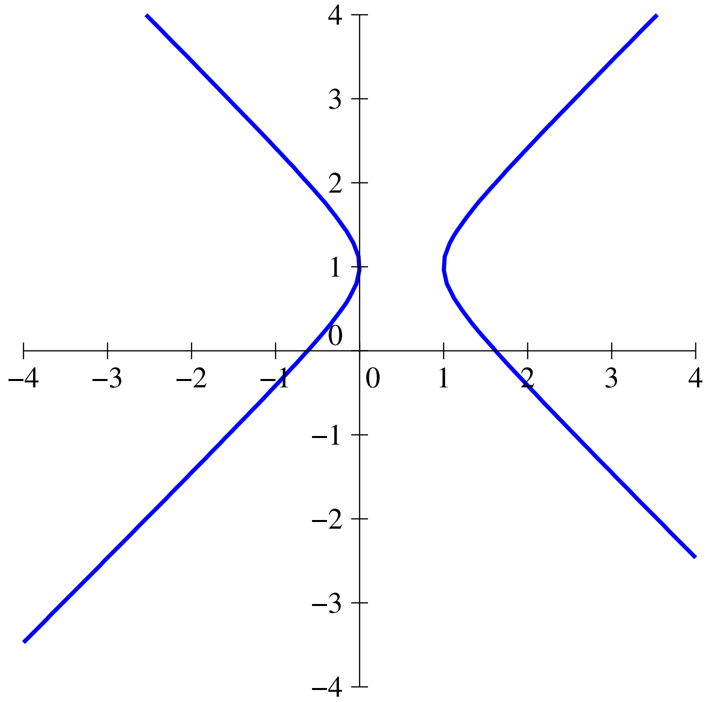
on trouve $4b = 5$, soit $b = \frac{5}{4}$, et donc $a = b - 2 = -\frac{3}{4}$. L'unique antécédent de $2 - i$ par f est donc le nombre $-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}i$.

3. Pour changer, on pose $z = a + ib$, et on multiplie comme souvent par le conjugué du dénominateur : $f(z) = a\frac{a + ib - 1 - i}{a - ib + i} = \frac{(a-1) + i(b-1)}{a + i(1-b)} = \frac{((a-1) + i(b-1))(a + i(b-1))}{a^2 + (1-b)^2} = \frac{a(a-1) - (b-1)^2 + i((a-1)(b-1) + a(b-1))}{a^2 + (1-b)^2} = \frac{a^2 - a - b^2 + 2b - 1 + i(b-1)(2a-1)}{a^2 + (1-b)^2}$.

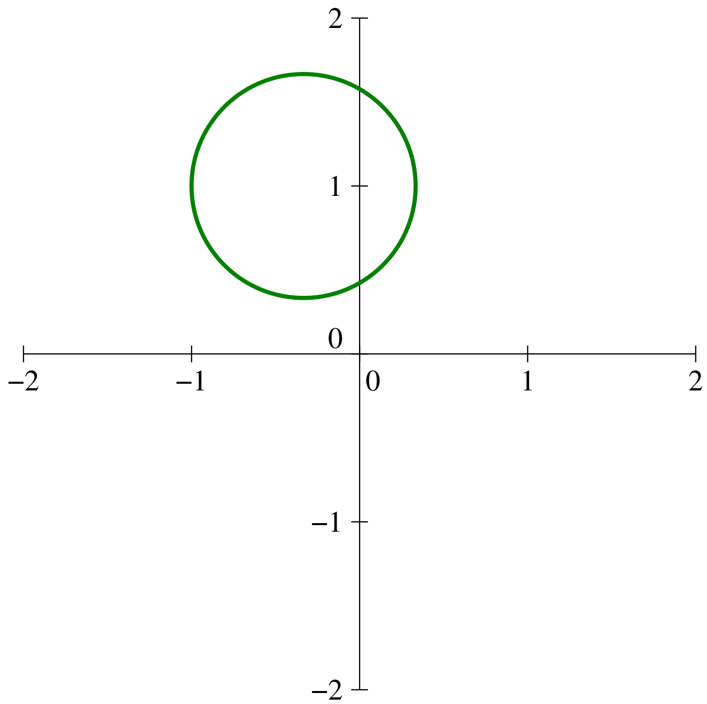
4. Il faut donc que la partie imaginaire du nombre qu'on vient de calculer s'annule. Si on a gardé la forme factorisée, la condition $(b-1)(2a-1) = 0$ est facile à gérer : soit $b = 1$ (on est donc sur la droite horizontale d'équation $y = 1$ (privée de i si on veut être tout à fait rigoureux), soit $a = \frac{1}{2}$, ce qui correspond cette fois à la droite verticale d'équation $a = \frac{1}{2}$. Un petit dessin pour illustrer :



5. On a cette fois la condition nettement moins sympathique $a^2 - b^2 - a + 2b = 1$. Ce n'est pas une équation de cercle (à cause des signes opposés devant les deux carrés) mais une équation d'hyperbole que vous ne pouvez pas vraiment reconnaitre. Signalons simplement qu'en posant $B = 2b - 2$ et $A = 2a - 1$, l'équation se ramène sous la forme $A^2 - B^2 = 1$, qui est celle d'une hyperbole qui admet pour axes de symétries les deux droites obtenues à la question précédente. Bon, voici une allure de l'hyperbole, qu'on ne peut guère obtenir par des moyens simples à votre niveau :



6. Il est préférable ici de de ne pas poser immédiatement $z = a + ib$. Écrivons simplement d'abord la condition sous la forme $|z - 1 - i| = 2|\overline{z} + i|$, soit encore en élevant au carré $|z - 1 - i|^2 = 4|\overline{z} + i|^2$ (tout étant positif, ça ne pose pas de problème). Il est temps de bourriner $|a + ib - 1 - i|^2 = 4|a - ib + i|^2$, soit $a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = 4(a^2 + b^2 - 2b + 1)$, ou encore $3a^2 + 3b^2 + 2a - 6b + 2 = 0$. Quitte à tout diviser par 3, on reconnait la forme d'une équation de cercle : $a^2 + b^2 + \dfrac{2}{3}a - 2b + \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(a + \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{9} + (b-1)^2 - 1 + \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(a + \dfrac{1}{3}\right)^2 + (b-1)^2 = \dfrac{4}{9}$. On reconnait le cercle de centre $I\left(-\dfrac{1}{3} + i\right)$ et de rayon $\dfrac{2}{3}$.



Exercice 3

1. Calculons donc : $v_0 = \frac{3}{2}$; $u_1 = \frac{2+\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}$; $v_1 = \frac{12}{7}$; $u_2 = \frac{\frac{7}{4}+\frac{12}{7}}{2} = \frac{49+48}{56} = \frac{97}{56}$. Poussons même jusqu'à $v_2 = \frac{168}{97}$ puisqu'on nous en demande une valeur approchée. Pour l'obtenir, on pose tout bêtement la division euclidienne : $168 = 97 + 71$, puis $710 = 97 \times 7 + 31$, et $310 = 97 \times 3 + 19$, donc $v_2 \simeq 1.73$. C'est une valeur approchée par défaut, comme toujours quand on arrête une division euclidienne après quelques étapes.

2. On va prouver par une récurrence simultanée que u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. C'est bien entendu vérifié au rang 0 vu les valeurs calculées plus haut. Supposons donc que ce soit le cas au rang n, on a alors $3 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4$ en additionnant simplement les encadrements, donc $\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ comme souhaité. De plus, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{2}{3}$ (tout est positif, pas de problème pour passer à l'inverse en changeant le sens des inégalités), donc $\frac{3}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$, et notre propriété reste donc vérifiée au rang $n+1$, ce qui achève notre récurrence.

3. Calculons donc $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{6}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 12}{2(u_n + v_n)}$. Or, par définition, $u_n v_n = 3$, donc $(u_n + v_n)^2 = (u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n = u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n = (u_n - v_n)^2$, ce qui donne bien la formule demandée par l'énoncé. Comme numérateur et dénominateur de cette fraction sont tous deux positifs, on en déduit que $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant v_{n+1}$, ce qui prouve l'inégalité $u_n \geqslant v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, le cas particulier $n = 0$ découlant des valeurs initiales calculées plus haut.

4. Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$. Cette expression est négative d'après la question précédente, donc (u_n) est décroissante. Puisque (u_n) est décroissante et positive, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est croissante, et (v_n) également. Nos deux suites sont donc monotones et bornées (d'après la question 2), elles sont convergentes (mais on ne peut pas dire plus pour l'instant).

5. On sait que $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} \times \frac{u_n - v_n}{u_n + v_n}$. Or, les encadrements de la question 2 prouvent que $u_n + v_n \geqslant 3$, et que $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2}$, donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{u_n - v_n}{12}$ (ce qui est encore mieux que ce que l'énoncé demandait).

6. On peut effectuer une petite récurrence : au rang 0, on sait que $u_0 - v_0 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \times 6^0}$, donc l'inégalité est en fait une égalité (et elle est donc vraie !). Supposons maintenant l'inégalité demandée vérifiée au rang n, alors d'après la question précédente (et l'hypothèse de récurrence) $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{6}(u_n - v_n) \leqslant \frac{1}{6} \times \frac{1}{2 \times 6^n} = \frac{1}{2 \times 6^{n+1}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève donc la récurrence.

7. Comme $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2 \times 6^n}$ (on a vu à la question 3 que $u_n - v_n \geqslant 0$, donc $u_n - v_n \geqslant 0$), et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2 \times 6^n} = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$. Cette limite, combinée aux monotonies des deux suites, permet de dire que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. En particulier, elle ont une limite commune l. Comme par définition on a $u_n \times v_n = 3$, et que par ailleurs $\lim_{n \to +\infty} u_n v_n = l^2$ (par simple produit de limites), on en déduit que $l^2 = 3$, et donc $l = \sqrt{3}$ (les deux suites ayant clairement une limite positive).

8. On souhaite avoir $|u_n - l| \leqslant 10^{-10}$. Or, par adjacence des deux suites, on sait qu'on aura toujours $v_n \leqslant l \leqslant u_n$, et donc $|u_n - l| \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2 \times 6^n}$. Une condition suffisante (mais pas

nécessaire, bien sûr) pour obtenir la valeur approchée souhaitée est donc que $\frac{1}{2 \times 6^n} \leqslant 10^{10}$, soit $6^n \geqslant \frac{10^{10}}{2}$, donc en passant au logarithme de base 6 (histoire de faire original), $n \geqslant \log_6(10^{10}) - \log_6(2)$ (valeur qui, pour les curieux, a une partie entière égale à 11. Il suffit donc de prendre $n = 12$ pour être certain d'avoir dix décimales correctes en prenant u_n comme approximation de $\sqrt{3}$. Si on se contente de $n = 4$, par le même raisonnement, on est certains d'avoir un écart inférieur à $\frac{1}{2 \times 6^4} = \frac{1}{2 \times 1\ 296} = \frac{1}{2\ 592}$. Cette valeur est comprise entre 10^{-3} et 10^{-4}, on aura donc au minimum trois décimales correctes.

Exercice 4

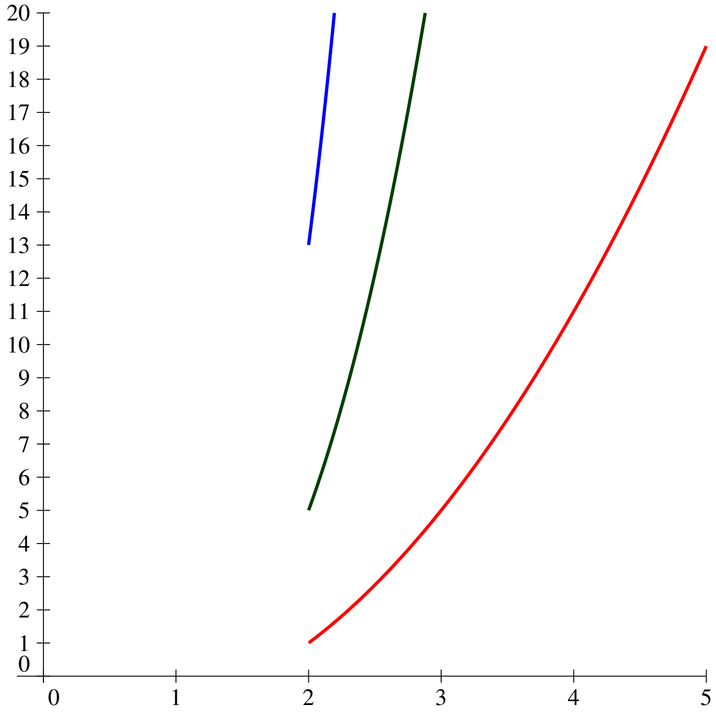
1. Calculons dans ce cas le discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, l'équation admet pour solutions $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Les modules de ces deux solutions sont égaux à 1.
2. (a) Posons donc $f(t) = t^3 + t + 1$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(t) = 3t^2 + 1$, manifestement toujours positive. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et continue, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (les limites sont évidentes pour une fonction polynômiale). Elle s'annule donc exactement une fois sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 < 0$, et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{8} > 0$, la stricte croissante de f assure que $-1 < r < -\frac{1}{2}$.

   (b) Avec les notations de l'énoncé, on aura donc $t^3 + t + 1 = (t - r)(t - z_1)(t - z_2)$, soit en développant tout $t^3 + t + 1 = t^3 - (r + z_1 + z_2)t^2 + (rz_1 + rz_2 + z_1z_2)t - rz_1z_2$. Par identification des coefficients, on obtient les relations $r + z_1 + z_2 = 0$, qui donne directement $z_1 + z_2 = -r$; $rz_1 + rz_2 + z_1z_2 = 1$, qu'on ne cherchera pas à exploiter dans cette question ; et $rz_1z_2 = -1$, donc $z_1z_2 = -\frac{1}{r}$ comme souhaité.

   (c) On sait que $-r$ est un nombre réel strictement positif, donc $|z_1 + z_2| = -r$, et l'encadrement obtenu sur r donne immédiatement $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$. De même, on a $|z_1z_2| = -\frac{1}{r}$, donc $1 < |z_1z_2| < 2$.

   (d) En supposant que $|z_1| \geqslant 2$, on doit avoir $|z_2| < 1$ pour avoir $|z_1z_2| = |z_1z_2| < 2$. Or, on sait que $|z_1 + z_2| < 1$, donc par inégalité triangulaire, $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| < 1$, ce qui implique bien $|z_1| < 1 + |z_2|$. Mais si on a $|z_2| < 1$, celà impliquera $|z_1| < 2$, ce qui est évidemment contradictoire avec la supposition effectuée.

   (e) La question précédente prouve que $|z_1| < 2$. Mais on peut évidemment montrer par le même raisonnement que $|z_2| < 2$ (les deux valeurs jouent un rôle complètement symétrique), et on sait déjà que $|r| = -r < 1$, donc nos trois solutions ont un module strictement inférieur à 2.
3. (a) Cette fonction est dérivable, de dérivée $g'(t) = nt^{n-1} - 1$, dérivée strictement positive sur l'intervalle choisi (puisque $n \geqslant 2$). La fonction g est donc strictement croissante, avec $g(2) = 2^n - 3 > 0$ (puisque encore une fois $n \geqslant 2$), et $\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$. En particulier, la fonction g est toujours strictement positive. Bien sûr, plus n est grand, et plus les valeurs prises vont être grandes. Une allure des courbes pour $n = 2$ (en rouge), $n = 3$ (en vert) et $n = 4$ (en bleu) :



(b) Supposons donc z solution de l'équation, et notons $t = |z|$. On a par hypothèse $|z^n+z+1| = 0$, or $|z^n + z + 1| \geqslant |z^n| - |z| - 1$ (toujours par inégalité triangulaire), donc on doit avoir $t^n - t - 1 \leqslant 0$. Autrement dit, $g(t) \leqslant 0$, ce qui implique manifestement $t < 2$ d'après l'étude précédente. Oui, encore une question passablement débile, je sais.

(c) Eh bien, on en pense qu'elle est absolument stupide. Par exemple $z = 0$ vérifie certainement $|z| < 2$ mais ne sera certainement jamais solution d'une équation de la forme $z^n+z+1 = 0$.