Devoir Surveillé n° 4

PTSI B Lycée Eiffel

15 décembre 2018

Exercice 0 (mise en jambes)

Les questions de cet exercice sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation $z^3 + (3i - 3)z^2 - (3 + 4i)z + 1 - 7i = 0$.
2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -2u_n + 6$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x)\sin(x)\, dx$ en effectuant au prélable une linéarisation.

Exercice 1

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe de module 1. On note alors $f(z) = \left|1 - z + \dfrac{z^2}{2}\right|$.

1. Calculer $f(z)$ lorsque $z = i$, puis lorsque $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. Expliquer pourquoi on a nécessairement $0 \leqslant f(z) \leqslant \dfrac{5}{2}$.
3. Rappeler quelle relation relie a et b lorsque z est de module 1. En déduire une expression de $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de a uniquement.
4. Déterminer un polynôme du second degré P tel que $f(z) = P(a)$ (en notant toujours a la partie réelle de z).
5. Étudier la fonction f, et en déduire son maximum et son minimum sur l'intervalle $[-1, 1]$.
6. En déduire un encadrement de $f(z)$ meilleur que celui de la question 2. Les bornes de ce nouvel encadrement peuvent-elles être atteintes ?

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ par $f(z) = \dfrac{z - 1 - i}{\overline{z} + i}$.

1. Calculer les images par f de 1 (sous forme algébrique et sous forme exponentielle), de $1 + 3i$ (sous forme algébrique), de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ (sous forme algébrique).
2. Déterminer les antécédents éventuels par f du nombre 1, puis ceux de 2 et $2 - i$.
3. Calculer $f(z)$ sous forme algébrique.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. On donnera bien entendu une interprétation géométrique assortie d'un petit dessin.
5. Déterminer de même l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.
6. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $|f(z)| = 2$.

Exercice 3

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par les conditions suivantes : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$ puis $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Calculer les valeurs exactes de v_0, u_1, v_1 et u_2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de v_2. Cette valeur approchée est-elle une valeur approchée par défaut ou par excès ?
2. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont bornées par $\dfrac{3}{2}$ et par 2.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$. En déduire que $u_n \geqslant v_n$.
4. Déterminer la monotonie des deux suites (u_n) et (v_n). Que peut-on en conclure sur les deux suites ?
5. Montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, que $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{6}$.
6. En déduire que $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2 \times 6^n}$.
7. Que peut-on dire sur les deux suites (u_n) et (v_n) au vu des résultats des questions 4 et 6 ? Déterminer la valeur de leur limite commune l.
8. Déterminer une valeur de n pour laquelle on peut être certain que u_n représente une valeur approchée à 10^{-10} près de sa limite l (on cherche une formule théorique, on ne cherchera pas à faire l'application numérique !). Combien de décimales de l la valeur de u_4 permettrait-elle de calculer avec certitude ?

Exercice 4

On considère l'équation $z^n + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer les solutions de l'équation lorsque $n = 2$. Quels sont leurs modules ?
2. On s'intéresse maintenant au cas $n = 3$, et on définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3 + t + 1$.
   (a) En étudiant la fonction f, vérifier que l'équation $z^3 + z + 1 = 0$ admet exactement une solution réelle qu'on notera r vérifiant $-1 < r < -\dfrac{1}{2}$ (on ne cherchera pas à déterminer la valeur exacte de r).
   (b) En notant z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation, prouver que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = -\dfrac{1}{r}$.
   (c) Donner un encadrement de $|z_1 + z_2|$ et de $|z_1 z_2|$.
   (d) En supposant que $|z_1| \geqslant 2$, que peut-on dire sur $|z_2|$? Justifier que $|z_1| < 1 + |z_2|$ et aboutir à une contradiction.
   (e) Montrer que toutes les solutions de l'équation sont de module strictement inférieur à 2.
3. On souhaite généraliser le résultat précédent à un entier naturel $n \geqslant 2$ quelconque :
   (a) Étudier la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $g(t) = t^n - t - 1$ (variations, limite, signe, courbe).
   (b) Montrer qu'une solution de l'équation $z^n + z + 1 = 0$ vérifie nécessairement $|z| < 2$.
   (c) Que pensez-vous de la réciproque de cette dernière implication ?