

Devoir Surveillé n° 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 novembre 2018

Exercice 1

- On pose donc $t = \frac{1}{2}x - 1$, soit $x = 2t + 2$, ce qui implique en particulier $dx = 2 dt$. Les bornes de l'intégrale deviennent $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ et $1 - 1 = 0$, et surtout ce qui se trouve sous la racine devient $4x - x^2 = 4(2t + 2) - (2t + 2)^2 = 8t + 8 - 4t^2 - 8t - 4 = 4(1 - t^2)$. On peut donc écrire $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{4 - 4t^2}} \times 2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = [\arcsin(t)]_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{\pi}{6}$.
- Effectuons donc une démonstration par récurrence : lorsque $n = 1$ (on peut même commencer à $n = 0$ si on préfère), la somme de gauche vaut -1 et le membre de droite vaut $(-1) \times \frac{1 \times 2}{2} = -1$, l'égalité est donc vérifiée. Supposons-la maintenant vérifiée au rang n pour un certain entier $n \geq 1$. On peut alors écrire $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1} (n+1)^2$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. Comme $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, on peut factoriser notre expression sous la forme $(-1)^{n+1} (n+1) \left(n+1 - \frac{n}{2} \right) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui est exactement la formule qu'on souhaitait démontrer. La propriété est donc vérifiée pour tout entier naturel $n \geq 1$.
- On commence par effectuer une décomposition en éléments simples : $\frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ pour trois réels a, b et c à déterminer. En multipliant par x , on doit avoir $a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{x+2} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}$, ce qui donne lorsque x tend vers 0 la valeur $a = -\frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1 , on trouve $b = \frac{-2}{-1} = 2$. Enfin, si on fait tendre x vers $+\infty$ après avoir multiplié par x , on trouve $a + b + c = 0$, donc $c = -a - b = -\frac{3}{2}$. Il est maintenant temps de calculer notre intégrale : $\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{2x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x+2)} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \ln(x) + 2 \ln(x+1) - \frac{3}{2} \ln(x+2) \right]_1^2 = -\frac{1}{2} \ln(2) + 2 \ln(3) - \frac{3}{2} \ln(4) - 2 \ln(2) + \frac{3}{2} \ln(3) = -\frac{11}{2} \ln(2) + \frac{7}{2} \ln(3)$.
- Il suffit de calculer d'abord la somme dépendant de l'indice i pour avoir ensuite une simplification bienvenue : $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)(2j+1)}{6j(j+1)} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n 2j+1 = \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+2)}{6}$.

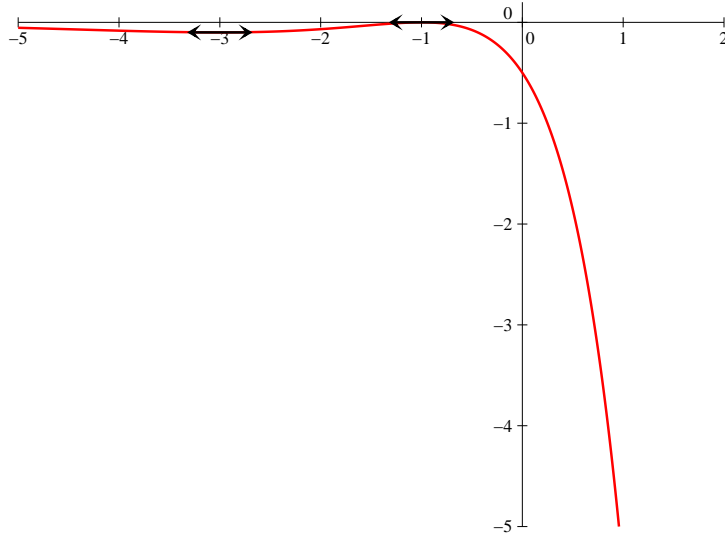
5. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants est $x^2 - 4x + 3 = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et pour racines $r_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ (oui, on pouvait aussi constater qu'il y avait une racine évidente) et $r_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Les solutions de l'équation homogène associée à notre équation sont donc les fonctions définies par des équations de la forme $y_h(x) = Ae^x + Be^{3x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On cherche désormais une solution particulière à l'équation complète sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ (puisque 1 a le mauvais goût d'être racine de l'équation caractéristique). On calcule donc $y_p'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$, puis $y_p''(x) = (2a + b + 4ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$. On introduit ces expressions dans l'équation complète, et on se permet en passant de supprimer les e^x qui se factorisent partout : y_p est solution si $2a + 2b + c + 4ax + bx + ax^2 - 4b - 4c - 8ax - 4bx - 4ax^2 + 3ax^2 + 3bx + 3c = 2x + 1$, soit $-4ax + 2a - 2b = 2x + 1$. Une identification immédiate donne $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -1$ (on peut choisir c comme on le souhaite, on prendra donc $c = 0$), soit $y_p(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^x$. Toutes les solutions de l'équation ont alors des équations de la forme $y(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x + A\right)e^x + Be^{3x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Pour la résolution du problème de Cauchy, on commence par évaluer en 0 à l'aide de l'expression précédente, ce qui donne $A+B = -\frac{1}{2}$. Puis on calcule $y'(x) = \left(-x - 1 - \frac{x^2}{2} - x + A\right)e^x + 3Be^{3x}$, ce qui évalué en 0 donne la seconde condition $-1 + A + 3B = -\frac{3}{2}$. En soustrayant la première condition à celle-ci, on trouve $-1 + 2B = -1$, donc $B = 0$. Reste alors $A = -\frac{1}{2}$, donc $y(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)e^x = -\frac{1}{2}(x + 1)^2e^x$. On peut déjà constater que la fonction y ne prend que des valeurs négatives et s'annule en $x = -1$, où il y aura donc un maximum pour y . Mais reprenons le calcul de y' à partir de cette nouvelle expression : $y'(x) = -(x + 1)e^x - \frac{1}{2}(x + 1)^2e^x = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)(x + 1)e^x$. En particulier, y' s'annule sans surprise pour $x = -1$, mais aussi pour $x = -3$, où la fonction admettra un minimum de valeur $y(-3) = -\frac{1}{2} \times 4e^{-3} = -\frac{2}{e^3} \simeq -0.1$. On a par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$ (calcul direct) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ (croissance comparée très classique, on développe tout pour vraiment être dans le cadre du cours). Bref, un tableau de variations ressemblant à ceci :

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+\infty$
f	0	$-2e^3$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$

Et une courbe de ce type :



Exercice 2

- Posons donc $x = \tan(t)$, ou $t = \arctan(x)$, ce qui implique donc $dt = \frac{1}{1+x^2} dx$. Ça tombe bien, puisqu'on doit faire disparaître un facteur $\frac{1}{1+x^2}$ de l'intégrale de départ « dans le dt ». On obtient donc $F(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{1+\tan^2(t)} dt$. Or, on sait bien que $1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$ (formules de dérivation de la fonction tangente), et par ailleurs que $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}$ en utilisant la formule de duplication $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. On en déduit que $F(x) = \int \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} dt = \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} = \frac{\sin(\arctan(x))}{4} + \frac{\arctan(x)}{2}$. Remarquons déjà qu'il s'agit bien de la primitive F cherchée puisque cette fonction s'annule en 0. On peut toutefois la simplifier un peu : en continuant à noter $t = \arctan(x)$, comme $1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2$, on a $\cos^2(t) = \frac{1}{1+x^2}$, et donc $\sin^2(t) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$. On en déduit que $\sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$, donc $\sin^2(2t) = 4\sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$. Or, $\sin(2t)$ est du signe de x (en effet, si $x \geq 0$, $\arctan(x) \in [0, \frac{\pi}{2}[$, donc $2t \in [0, \pi[$ et $\sin(2t) \geq 0$, et de même si $x \leq 0$), donc on aura toujours $\sin(2t) = \frac{2x}{1+x^2}$. On peut enfin exprimer plus simplement notre primitive : $F(x) = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan(x)$.
- (a) On va donc calculer $G(x) = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ en posant $v(x) = x$, et donc $v'(x) = 1$, et $u'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, qui admet par exemple pour primitive $u(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)}$ (puisque l'on a une forme $\frac{u'}{u^2}$ à une constante près). On en déduit que $G(x) = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int \frac{1}{2(x^2+1)} dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(x)$.
- (b) En écrivant brillamment $f(x) = \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - g(x)$, on constate qu'une pri-

mite de f est donnée par l'expression $\arctan(x) - G(x) = \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2(x^2 + 1)}$. Cette primitive s'annulant en 0, il s'agit de la fonction F .

3. (a) Utilisons donc la méthode brutale de mise au même dénominateur : $\frac{\alpha}{x-i} + \frac{\beta}{(x-i)^2} + \frac{\bar{\alpha}}{x+i} + \frac{\bar{\beta}}{(x+i)^2} = \frac{\alpha(x+i)^2(x-i) + \beta(x+i)^2 + \bar{\alpha}(x-i)^2(x+i) + \bar{\beta}(x-i)^2}{(x^2+1)^2}$. Contentons-

nous de recopier le numérateur, qu'on notera N , en développant tout : $N = \alpha(x^2+1)(x+i) + \bar{\alpha}(x^2+1)(x-i) + \beta(x^2+2ix-1) + \bar{\beta}(x^2-2ix-1) = (\alpha + \bar{\alpha})x^3 + (i\alpha - i\bar{\alpha} + \beta + \bar{\beta})x^2 + (\alpha + \bar{\alpha} + 2i\beta - 2i\bar{\beta})x + i\alpha - i\bar{\alpha} - \beta - \bar{\beta}$. Cette magnifique expression est censée être égale à 1, identifions donc : le terme en x^3 s'annule, ce qui implique $\alpha + \bar{\alpha} = 0$, autrement dit α doit être imaginaire pur. Pour que le terme en x s'annule, on doit alors avoir $\beta - \bar{\beta} = 0$, donc β doit être réel. En notant a la partie imaginaire de α , le coefficient de x^2 (qui doit être nul aussi) vaut maintenant $-2a + 2\beta$, et le coefficient constant, qui doit être égal à 1, vaut $-2a - 2\beta$. En additionnant ces deux conditions, on trouve $-4a = 1$, soit $a = -\frac{1}{4}$, et donc $\alpha = -\frac{i}{4}$. En les soustrayant, $\beta = -\frac{1}{4}$. Il est temps de conclure :

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = -\frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)} - \frac{1}{4(x-i)^2} + \frac{1}{4(x+i)^2}.$$

- (b) En effet, $-\frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)} = \frac{i(x-i) - i(x+i)}{4(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2+1)}$, qui admet pour primitive $-\frac{1}{2} \arctan(x)$.

- (c) Il suffit de prendre $-\frac{\beta}{x-i}$, soit ici $\frac{1}{4(x-i)}$. On peut se contenter de prendre le conjugué pour une primitive de $\frac{\bar{\beta}}{(x+i)^2}$, qui sera donc $\frac{1}{4(x+i)}$.

- (d) En additionnant les trois primitives calculées aux questions précédentes, on trouve $-\frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{4(x+i)} + \frac{1}{4(x-i)} = -\frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}$. On retrouve bien la bonne expression de F (qui est clairement réelle!).

Problème

A. Calculs préliminaires.

- On peut mettre au même dénominateur, ce qui ira très vite ici : $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(x^2+1)}$. On veut que le numérateur soit égal à 1, une identification facile donne $a = 1$ (terme constant), $c = 0$, puis $a + b = 0$, donc $b = -1$. Autrement dit, $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$. Une primitive de cette fonction est $x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$.
- On va calculer $\int (1-x^2) \ln(x) dx$ par une IPP en posant $v(x) = \ln(x)$, donc $v'(x) = \frac{1}{x}$, et $u'(x) = 1-x^2$, on peut donc prendre $u(x) = x - \frac{x^3}{3}$. On a alors $\int (1-x^2) \ln(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \ln(x) - \int 1 - \frac{x^2}{3} dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \ln(x) + \frac{x^3}{9} - x$.
- Là aussi on procède par IPP en posant $v(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$, et $u'(x) = x$ avec $u(x) = \frac{x^2}{2}$ qui convient. On obtient donc $\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}$.

B. Résolution de l'équation homogène (E_0).

1. Si $y(x) = x$, on a $y'(x) = 1$ et $y''(x) = 0$, et en remplaçant dans le membre de gauche de notre équation, $-\frac{2x}{1+x^2} \times 1 + \frac{2}{1+x^2} \times x$ est bien égal à 0.
2. Autrement dit, on a $y(x) = xz(x)$, donc $y'(x) = z(x) + xz'(x)$, puis $y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$. On met tout ça dans notre équation homogène pour obtenir $2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}z(x) - \frac{2x^2}{1+x^2}z'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x) = 0$, soit $xz''(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0$ en mettant les termes en z' au même dénominateur.
3. On normalise : $w' + \frac{2}{x(1+x^2)}w = 0$. Une primitive de notre coefficient (à un facteur 2 près) ayant déjà été déterminée plus haut, on peut directement donner les solutions de l'équation (qui est homogène) : elles sont de la forme $w(x) = Ke^{-2\ln(x)+\ln(x^2+1)} = \frac{K(x^2+1)}{x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On peut aussi écrire $w(x) = K + \frac{K}{x^2}$, fonction dont il suffit de calculer les primitives pour obtenir les fonctions z convenables : $z(x) = Kx - \frac{K}{x} + L$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$ (attention à ne pas oublier la seconde constante issue de l'intégration).
4. Il suffit de conclure : $y(x) = xz(x) = Kx^2 + Lx - K$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.

C. Résolution de l'équation complète (E).

1. C'est un simple calcul : $y_p'(x) = A(x) + xA'(x) + 2xB(x) + (x^2 - 1)B'(x)$. Avec l'hypothèse effectuée dans l'énoncé, il ne reste que $y_p'(x) = A(x) + 2xB(x)$. En dérivant cette expression, on a ensuite $y_p''(x) = A'(x) + 2B(x) + 2xB'(x)$.
2. Encore une fois, on remet tout dans l'équation : $A'(x) + 2B(x) + 2xB'(x) - \frac{2x}{1+x^2}A(x) - \frac{4x^2}{1+x^2}B(x) + \frac{2x}{1+x^2}A(x) + \frac{2x^2-2}{x^2-1}B(x) = (x^2+1)\ln(x)$, ce qui se simplifie comme prévu en $A'(x) + 2xB'(x) = (x^2+1)\ln(x)$.
3. En notant (1) la condition imposée dans l'énoncé, et (2) la deuxième relation obtenue à la question précédente, on peut calculer (1) - $x \times$ (2) pour obtenir $(x^2 - 1 - 2x^2)B'(x) = -x(x^2+1)\ln(x)$, soit $B'(x) = x\ln(x)$. On a vu plus haut qu'on pouvait donc prendre $B(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$. Ensuite, on reprend par exemple (2) pour trouver $A'(x) = (x^2+1)\ln(x) - 2x^2\ln(x) = (1-x^2)\ln(x)$, et là encore on a déjà tout calculé : on peut prendre $A(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) + \frac{x^3}{9} - x$. Une solution de notre équation complète est donc la fonction $y_p : x \mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln(x) + \frac{x^4}{9} - x^2 + \frac{x^4 - x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4} = \left(\frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \frac{5}{36}x^4 - \frac{3}{4}x^2$.
4. Il n'y a plus qu'à recopier : $y(x) = \left(\frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \frac{5}{36}x^4 + \left(K - \frac{3}{4}\right)x^2 + Lx - K$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.