Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 3

PTSI B Lycée Eiffel

24 novembre 2018

Exercice 1

Effectuer les calculs suivants (les questions sont indépendantes) :

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$ en effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{2}x - 1$.
2. Prouver par récurrence la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)}\, dx$.
4. Calculer (et simplifier) la somme double $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)}$.
5. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$. Déterminer la solution de cette équation vérifiant $y(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $y'(0) = -\dfrac{3}{2}$. Étudier cette solution et tracer une allure de la courbe intégrale correspondante.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ s'annulant en 0. On notera F cette primitive. Les trois questions de l'exercice présentent trois méthodes différentes pour ce calcul de primitive et sont donc complètement indépendantes.

1. Effectuer un calcul direct de la primitive F en effectuant le changement de variable $x = \tan(t)$.
2. (a) Calculer à l'aide d'une IPP une primitive de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$ (on pourra poser dans cet IPP $v(x) = x$, et donc $u'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$).
   (b) À l'aide d'une réécriture astucieuse de $f(x)$, exploiter le résultat précédent pour retrouver l'expression de F.
3. On admet qu'on peut effectuer sur $f(x)$ une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ donnant une égalité de la forme $f(x) = \dfrac{\alpha}{x-i} + \dfrac{\beta}{(x-i)^2} + \dfrac{\overline{\alpha}}{x+i} + \dfrac{\overline{\beta}}{(x+i)^2}$, où α et β sont deux constantes complexes.
   (a) Déterminer les valeurs de α et de β.
   (b) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x-i} + \dfrac{\overline{\alpha}}{x+i}$ (on commencera par tout remettre au même dénominateur).

(c) Déterminer une primitive **complexe** de la fonction $x \mapsto \dfrac{\beta}{(x-i)^2}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{\overline{\beta}}{(x+i)^2}$.

(d) Déduire de tous ces calculs une primite de f, dont on vérifiera qu'elle est bien réelle. Conclure.

Problème

On s'intéresse dans ce problème à la résolution sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x)$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée à l'équation (E).

A. Calculs préliminaires.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$. En déduire une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ sur l'intervalle I.
2. Déterminer une primitive sur I de la fonction $g : x \mapsto (1-x^2)\ln(x)$.
3. Déterminer une primitive sur I de la fonction $h : x \mapsto x\ln(x)$.

B. Résolution de l'équation homogène (E_0).

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x$ est solution de cette équation.
2. Soit y une solution de (E_0). On pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Vérifier que z est alors solution de l'équation différentielle $xz'' + \dfrac{2}{1+x^2}z' = 0$.
3. Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente (on pourra commencer par poser $w = z'$ et déterminer les fonctions w convenables).
4. En déduire les solutions de l'équation (E_0) (on admettra que l'implication prouvée à la question 2 est en fait une équivalence).

C. Résolution de l'équation complète (E).

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = xA(x) + (x^2-1)B(x)$, où A et B sont deux fonctions dérivables sur I et vérifiant la condition supplémentaire suivante : $\forall x \in I$, $xA'(x) + (x^2-1)B'(x) = 0$.

1. Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de A et B.
2. Montrer que y_p est solution de (E) si $A'(x) + 2xB'(x) = (x^2+1)\ln(x)$.
3. Déterminer A' et B', puis en déduire une fonction y_p solution de (E).
4. Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation différentielle (E).