# Devoir Surveillé n° 2

PTSI B Lycée Eiffel

15 octobre 2018

## Exercice 1

Effectuer les calculs suivants (les questions sont indépendantes) :

1. Résoudre l'équation $\cos(4x) + \cos(9x) + \cos(14x) = 0$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} 3^{k-1}2^{2-k}$.
3. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right)$ (on doit trouver une fraction simple comme résultat).
4. Résoudre l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.
5. On pose $f(x) = |x\ln(|x|)|$. Déterminer le domaine de définition, la parité éventuelle, et le tableau de variations de $f$ (on donnera bien sûr une allure rapide de courbe).

## Exercice 2

On pose pour tout cet exercice $f(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$.

1. Déterminer un intervalle d'étude $I$ intelligent pour la fonction $f$.
2. Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
3. On rappelle que $\cos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer la valeur de $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$, puis étudier les variations de la fonction sur $I$. On pourra par exemple prouver que $f'(x) = -12\sin(x)\cos(2x)\cos^3(x)$.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ en son point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$. Donner une valeur approchée de son coefficient directeur.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de $f$ sur une période complète, en y faisant notamment figurer la tangente calculée à la question précédente.

## Exercice 3

On cherche à calculer dans cet exercice la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$.
2. En déduire la valeur de $S_n$ ainsi que sa limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
3. Démontrer à nouveau la formule obtenue pour $S_n$ par récurrence.

## Exercice 4

On définit dans cet exercice une fonction $g$ par $g(x) = (x-1)^2 e^{-x}$, ainsi qu'une famille de fonctions $f_k$ définies par $f_k(x) = x + k(x^2+1)e^{-x}$ (où $k$ est un réel quelconque). On notera $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $g$, et dresser son tableau de variations complet (limites incluses).
   (b) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction $g$ (on précise que $e^3 \simeq 20$).
   (c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = a$ en distinguant des cas suivant la valeur du réel $a$ (on fera un effort particulier de rigueur dans la rédaction pour cette question).
2. Expliquer pourquoi les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une asymptote commune en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée $f_k'$ de la fonction $f_k$ et déterminer en fonction de $k$ le nombre de points où $\mathcal{C}_k$ admet une tangente horizontale (cette question devrait avoir un rapport avec la question 1.$c$).
4. On note $\Gamma$ la courbe constituée de tous les points où l'une des courbes $\mathcal{C}_k$ admet une tangente horizontale. Montrer que la courbe $\Gamma$ est incluse dans la courbe représentative d'une fonction $h$ définie par une équation de la forme $h(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P$ et $Q$ sont des fonctions polynômiales. Cette question est complètement indépendante des dernières questions de l'exercice.
5. Que peut-on dire des tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 1, lorsque $k$ parcourt $\mathbb{R}$ ?
6. (a) On note $T_k$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en son point d'abscisse 2. Déterminer une équation de la droite $T_k$.
   (b) Montrer que les droites $T_k$ sont coucourantes en un point $M$ dont on précisera les coordonnées.

## Exercice 5

On définit dans cet exercice trois fonctions $f$, $g$ et $u$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x))$, $g(x) = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$ et $u(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$.

1. Rappeler et démontrer la formule reliant $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ (oui, c'est une question de cours).
2. Étudier les variations de la fonction $u$ et dresser son tableau de variations complet (limites incluses).
3. En déduire le tableau de variations de la fonction $g$ (sans calcul de dérivée supplémentaire).
4. Calculer les dérivées des fonctions $f$ et $g$ et prouver de façon rigoureuse que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
5. (a) Calculer les valeurs de $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$ et $\mathrm{sh}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$.
   (b) En utilisant le fait que $f\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right) = g\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$, calculer et simplifier la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
6. (a) Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$. On notera $a$ l'unique solution de cette équation.
   (b) En partant de l'égalité $f(a) = g(a)$, déterminer la valeur (qu'on simplifiera au maximum) de la tangente d'un autre angle simple.