Devoir Surveillé n° 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2018

Exercice 1

1. Cette première question est une arnaque absolue, puisque l'équation ne se résout pas (ou du moins très mal) pas un calcul classique (élever au carré, par exemple, mène à une équation du quatrième degré si on veut vraiment se débarasser des racines carrées). En fait, pas besoin de se fatiguer, l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 24$. Or, si c'est le cas, $x > 2\sqrt{x}$ (puisque cette condition est vérifiée quand $\sqrt{x} > 2$, soit $x > 4$). Or, quand l'expression est définie, $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} < 2\sqrt{x}$ (chacun des deux termes de la somme étant strictement plus petit que $\sqrt{x}$. On en déduit que $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} < x$, et notre équation ne peut donc pas avoir de solution. Bilan : $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. On revient à quelque chose d'extrêmement classique avec un petit tableau de valeurs absolues. Les valeurs annulant chacune des expressions sont assez triviales pour ne pas nécessiter le détail du calcul. Dans le tableau, on notera S la somme des trois valeurs absolues du membre de gauche de l'inéquation :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	0	x		x		x	
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$		$x-1$	
$\lvert x-2\rvert$		$2-x$		$2-x$		$2-x$	0	$x-2$	
S		$3-3x$		$3-x$		$x+1$		$3x-3$	

On peut si on le souhaite ajouter dans le tableau les valeurs aux bornes de chaque intervalle : 3 pour $x = 0$; 2 pour $x = 1$ et 3 pour $x = 2$. Reste ensuite à résoudre l'inéquation sur chaque intervalle :

- sur $]-\infty, 0]$, $S \leqslant 6 \Leftrightarrow 3x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on conserve donc l'intervalle $[-1, 0]$ dans la solution de notre inéquation.
- sur $[0, 1]$, $S \leqslant 6 \Leftrightarrow x - 3 \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai sur l'intervalle considéré, donc on conserve tout l'intervalle $[0, 1]$.
- sur $[1, 2]$, $S \leqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant 5$, ce qui est à nouveau toujours vérifié on conserve $[1, 2]$.
- enfin, sur $[2, +\infty]$, $S \leqslant 6 \Leftrightarrow 3x \leqslant 9 \Leftrightarrow x \leqslant 3$, on ne conserve que l'intervalle $[2, 3]$.

Il ne reste plus qu'à conclure brillamment : $\mathcal{S} = [-1, 3]$.

3. On s'empresse d'effectuer le changement de variable $X = e^x$, puis de multiplier par X (qui ne peut pas s'annuler) pour obtenir l'équation du second degré $X^2 + X - \frac{3}{4} = 0$. Elle admet pour discriminant $\Delta = 1+3 = 4$, et pour solutions $X_1 = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$. La première solution est impossible (puisque $X = e^x$ est nécessairement strictement positif), on conserve donc $X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, et on conclut : $\mathcal{S} = \{-\ln(2)\}$.
4. L'équation ne peut avoir de sens que si $x > 0$. Dans ce cas on peut regrouper les ln et les enlever sans problème (tout est strictement positif) : $2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(3x)$, donc $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 3x$,

soit encore $x^2 + 6x + 9 - 12x = 0$, donc $x^2 - 6x + 9 = 0$. On reconnait le développement d'une identité remarquable : on doit avoir $(x-3)^2 = 0$, la seule solution de l'équation est donc $x = 3$, qui est bien strictement positif, donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

5. On commence par constater que l'équation n'est pas une équation du second degré lorsque $m = -1$. Dans ce cas l'équation $1 = 0$ n'admet bien entendu aucune solution. Si $m \neq -1$, on calcule le discriminant de l'équation : $\Delta = (m+1)^2 - 4(m+1) = (m+1)(m+1-4) = (m+1)(m-3)$. Ce discriminant est positif à l'extérieur de ses racines, on va donc distinguer trois cas :
   - si $m = 3$, le discriminant s'annule, et l'équation admet pour unique solution $x = \dfrac{-(m+1)}{2(m+1)} = -\dfrac{1}{2}$.
   - si $m \in]-1, 3[$, l'équation n'admet aucune solution réelle et $\mathcal{S} = \emptyset$.
   - si $m < -1$ ou $m > 3$, alors l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-(m+1) + \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2(m+1)} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m-3}{|m+1|}}$, et $x_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m-3}{|m+1|}}$. On a dans ce cas $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$.

Exercice 2

1. Encadrer $\sqrt{5}$ entre 2 et 3 est très suffisant : $4 \leqslant 2 + \sqrt{5} \leqslant 5$, donc $1 < \alpha < 2$ (la fonction racine cubique est strictement croissante, et on a $\sqrt[3]{1} = 1$ et $\sqrt[3]{8} = 2$. De même, on aura $-1 \leqslant 2 - \sqrt{5} \leqslant 0$, donc $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$.
2. Il suffit d'écrire que $\alpha\beta = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{(4-5)} = \sqrt[3]{-1} = -1$; et bien sûr $\alpha^3 + \beta^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$.
3. (a) Carton rouge à tous ceux qui n'ont pas répondu correctement à cette pure question de cours : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   (b) En exploitant les calculs effectués précédemment, $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 4 - 3(\alpha+\beta)$.
   (c) On remplace dans l'égalité précédente : $u^3 = 4 - 3u$, donc en effet $u^3 + 3u - 4 = 0$.
   (d) L'équation du troisième degré précédente admet $x = 1$ comme racine évidente, on peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $x^3 + 3x - 4 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Une identification des coefficients donne alors $a = 1$; $b - a = 0$ donc $b = a = 1$; puis $c - b = 3$, donc $c = 4$, ce qui est cohérent avec la dernière condition. On constate que le trinôme $x^2 + x - 4$ a un discriminant strictement négatif, il ne peut donc pas avoir de racines réelles. Notre équation admet donc pour unique racine réelle le nombre 1, ce qui prouve que $u = 1$, soit $\alpha + \beta = 1$.
4. Développons donc : $P(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = x^2 - x - 1$ d'après les calculs précédents.
5. Puisque α et β sont solutions manifestes de l'équation $P(x) = 0$, ils sont donc solutions de $x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et pour solutions $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$, les encadrements de la première question de l'exercice permettent d'affirmer que $\alpha = x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, et $\beta = x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3

La fonction f est définie lorsque $x + \sqrt{x^2+9}$ est définie et strictement positif. Or, $\sqrt{x^2+9}$ est toujours défini (puisque $x^2 + 9$ est positif pour tout réel x), mais surtout $\sqrt{x^2+9} > \sqrt{x^2} = |x|$. On en déduit que $x + \sqrt{x^2+9} > x + |x|$, donc $x + \sqrt{x^2+9}$ pour tout réel. En fait, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Étudions désormais les variations de la fonction f : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x + \sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}(x+\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$. Cette dérivée étant manifestement strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f y est strictement croissante. Comme est elle continue, elle est nécessairement bijective sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (aucune forme indéterminée de ce côté, ce qui est dans le ln tend vers $+\infty$), et on peut écrire en exploitant la quantité conjuguée que $x + \sqrt{x^2+9} = \dfrac{x^2 - (x^2+9)}{x - \sqrt{x^2+9}} = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+9} - x}$. Cette expression ayant une limite nulle quand x tend vers $-\infty$ (puisque son dénominateur tend vers $+\infty$ sans forme indéterminée), la composition par la fonction ln nous donne $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Reste à déterminer sa réciproque en « résolvant » l'équation $f(x) = y$, c'est-à-dire $\ln(x + \sqrt{x^2+9}) = y$. On peut bien sûr tout composer par la fonction exponentielle pour obtenir l'équation équivalente $x + \sqrt{x^2+9} = e^y$. On passe le x de l'autre côté et on met le tout au carré (on ne sait pas s'il s'agit d'une équivalence, mais l'équation de départ implique certainement celle-ci) : $x^2+9 = (e^y-x)^2 = e^{2y}-2xe^y+x^2$. Les x^2 ont le bon goût de se simplifier pour donner $2xe^y = e^{2y}-9$, soit $x = \dfrac{e^y}{2} - \dfrac{9}{2e^y}$. Eh bien voilà, on a obtenu l'expression de la réciproque de f : $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}e^y - \dfrac{9}{2}e^{-y}$.

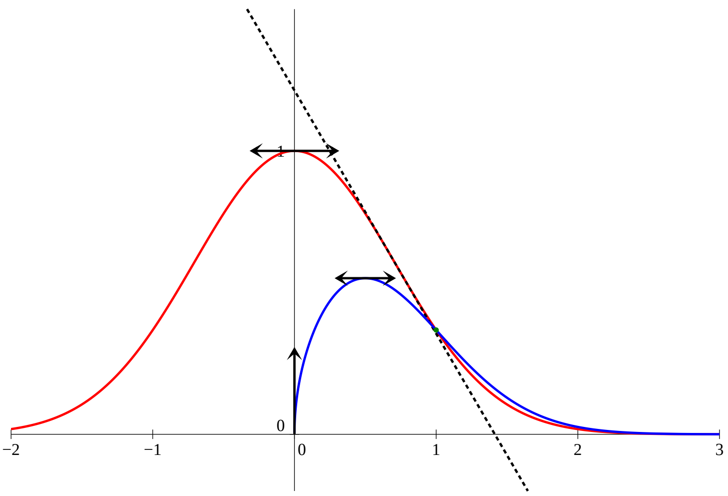
Exercice 4

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire (la fonction carré est paire, composer par l'exponentielle n'y change rien). La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^+$, et ne peut pas avoir de parité puisque son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (-2x)e^{-x^2}$, dont le signe est opposé à celui de x. En particulier, f atteint en 0 un maximum de valeur $f(0) = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (pas de difficulté, il suffit de composer des limites égales à $-\infty$ par une exponentielle). On peut résumer ces calculs dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. La fonction f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde est du signe de $2x^2-1$, et elle s'annule en particulier lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Avec les notations de l'énoncé, on posera donc $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Notons enfin que f'' est positive à l'extérieur de ses racines, et donc négative sur $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
4. Cette tangente a une équation de la forme $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. On calcule donc $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, puis $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$. Notre tangente a donc pour équation $y = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{e}} = \dfrac{-\sqrt{2}x+2}{\sqrt{e}}$.

5. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (en 0, a priori, ça ne devrait pas être le cas à cause de la racine carrée), de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x^2} + \sqrt{x}\times(-2x)e^{-x^2} = \dfrac{(1-4x^2)e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$. Cette dérivée est du signe de $1-4x^2$, qui s'annule lorsque $x^2 = \dfrac{1}{4}$, donc si $x = \pm\dfrac{1}{2}$. Ici, on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe sur $\mathbb{R}^+$, la fonction g est donc croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. En particulier, elle admet un maximum de valeur $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{e}}}$. Comme on sait que $\dfrac{1}{e} \simeq 0.36$, on peut calculer $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \simeq 0.6$, puis $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{4}}} \simeq 0.8$ (valeur exactement légèrement inférieur à 0.8), donc ce maximum vaut environ $\dfrac{0.8}{1.4} \simeq 0.4$.
6. Il n'y a qu'une seule borne, et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (pas de complication ici). De plus, $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x^2)e^{-x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = +\infty$, il y aura bien une tangente verticale à la courbe en 0.
7. Il suffit d'étudier le signe de $g(x) - f(x) = (\sqrt{x}-1)e^{-x^2}$. Ce signe est le même que celui de $\sqrt{x}-1$, il est positif lorsque $x \geqslant 1$. On en déduit que la courbe de f est au-dessus de celle de g sur $[0,1[$, en-dessous sur $]1,+\infty[$, et que les deux courbes se croisent en leur point d'abscisse 1, pour lequel on a $f(1) = g(1) = \dfrac{1}{e}$.
8. Pour tracer la tangente de la question 4, on peut par exemple utiliser son ordonnée à l'origine $2\times 0.6 \simeq 1.2$, et le fait qu'elle coupe l'axe des abscisses lorsque $-\sqrt{2}x + 2 = 0$, donc $x = \sqrt{2}$. Une allure des courbes (celle de f en rouge, celle de g en bleue, la tangente en pointillés, et pour ceux qui voient bien le point d'intersection des deux courbes en vert) :



Exercice 5

1. Pour que la fonction soit définie, il faut bien entendu que $x \neq 1$, et que l'expressions sous la racine carrée soit positive. Faisons un petit tableau de signe :

x		0		1	
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x^3}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

Conclusion : $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

2. On peut écrire $\dfrac{x^3}{x-1}$ sous la forme $\dfrac{x^2}{1-\frac{1}{x}}$ pour obtenir facilement $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x-1}=+\infty$, et donc après composition par la racine carrée $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Pas de limite à calculer en 0, puisque la fonction y est définie (avec bien sûr $f(0)=0$. Par contre, on a une dernière limite à calculer en 1 qui ne pose aucun problème : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ (le quotient dans la racine tendant vers $+\infty$ puisque son dénominateur tend vers 0 par valeurs positives).

3. Pour ce faire, reprenons le petit calcul de la question précédente : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}\times\sqrt{\dfrac{x^2}{1-\frac{1}{x}}}=\dfrac{|x|}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$. La racine carrée du dénominateur a pour limite 1 quand x tend vers $\pm\infty$. De plus, $\dfrac{|x|}{x}=1$ lorsque $x>0$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, mais $\dfrac{|x|}{x}=-1$ lorsque $x<0$, ce qui donne cette fois $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$.

4. Reprenons une nouvelle fois notre expression en imposant des valeurs positives pour x : $f(x)-x=\dfrac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}-x=x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)=x\times\dfrac{\frac{x}{x-1}-1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}=\dfrac{x}{x-1}\times\dfrac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}$ (en multipliant par la quantité conjuguée en cours de calcul). Il n'y a plus de forme indéterminée : comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\dfrac{1}{2}$. Ceci prouve que la droite d'équation $y=x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

5. Il faudrait cette fois-ci trouver une limite finie à $f(x)+x$ quand x tend vers $-\infty$, reprenons donc le calcul précédent pour des valeurs négatives de x : $f(x)+x=\dfrac{-x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}+x=-x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)$. Le calcul se termine exactement de la même façon (avec pour seule différence le signe $-$ devant le tout), donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=-\dfrac{1}{2}$, et la droite d'équation $y=-x-\dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

6. En posant $u(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$, on calcule $u'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$, puis $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\times\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3}}$. Tout est positif dans cette dérivée sauf le terme $2x-3$, qui s'annule quand $x=\dfrac{3}{2}$ (et est positive après cette valeur). La fonction f admet à cet endroit un minimum local de valeur $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2}-1}}=\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\simeq 2.5$. Profitons-en pour dresser un tableau de variations complet pour la fonction f :

x	$-\infty$		0	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. Quitte à supposer que x est négatif (puisqu'on est à gauche de 0), on peut écrire $f'(x)=\dfrac{x^2(2x-3)\sqrt{1-x}}{-2(x-1)^2\times x\sqrt{-x}}=\dfrac{(3-2x)\sqrt{-x}}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$. Sous cette forme, il est facile de constater que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$, donc que $\mathcal{C}_f$ admet à l'orgine une tangente horizontale.

8. Voilà la dernière courbe pour achever ce devoir somme toute assez trivial :