Concours Blanc : épreuve de mathématiques

PTSI Lycée Eiffel

4 juin 2019

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On pose dans tout cet exercice, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x (\ln(t))^n \, dt$.

1. Montrer que $F_n(x)$ existe effectivement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$.
2. (a) Calculer $F_1(e)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} F_1(x)$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
3. L'entier n est à nouveau quelconque dans cette question. On ne cherchera pas à calculer explicitement $F_n(x)$.
   (a) Montrer que la fonction F_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F_n'(x)$. En déduire les variations de F_n (on pourra distinguer deux cas).
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \geqslant e$, $t^{\frac{1}{n}} \ln(t) \geqslant 1$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = +\infty$.
4. On pose désormais $u_n = F_n(e)$ (valeur qu'on ne cherchera pas non plus à calculer explicitement).
   (a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge vers un réel $L \geqslant 0$.
   (c) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   (d) En déduire que $L = 0$.
   (e) Montrer que $u_n \sim \dfrac{e}{n}$.
   (f) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 u^n e^u \, du = 0$.

Exercice 2

L'objectif de l'exercice est l'étude de quelques exemples et de certaines propriétés des endomorphismes f d'un espace vectoriel réel vérifiant $f \circ f \circ f = f$ (qu'on notera aussi dans l'énoncé $f^3 = f$).

Partie A : Étude d'un premier exemple.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans le base canonique est la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f^3 = f$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle bijective ?
3. Déterminer $\ker(f)$ (qu'on écrira sous forme de Vect).
4. Déterminer $\ker(f^2 - id_{\mathbb{R}^3})$, et montrer que $\ker(f^2 - id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3$.
5. Soient $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, -1, 2)$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{B}$, puis calculer son inverse P^{-1}. En déduire $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Partie B : Étude d'un second exemple.

Soit g l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même définie par :
$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $g(P) = (X + 1)P' - P$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer en détaillant bien le raisonnement effectué que $g^3 = g$.
3. Écrire $Mat_{\mathcal{B}_c}(g)$, où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer les trois noyaux $\ker(g)$, $\ker(g - id)$ et $\ker(g + id)$ sous forme de Vect.

Partie C : Cas général.

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel réel **qui n'est pas forcément de dimension finie**. On s'intéresse aux endomorphismes de E vérifiant la condition $f^3 = f$.

1. Montrer que les symétries vectorielles vérifient la condition $f^3 = f$.
2. Que peut-on dire des projections vectorielles ?
3. Montrer que, si f est bijective et vérifie la condition $f^3 = f$, alors f est une symétrie vectorielle de E.

Dans la suite de l'énoncé, f est un endomorphisme **quelconque** vérifiant $f^3 = f$.

4. On suppose qu'il existe un nombre réel λ et un vecteur u non nul tel que $f(u) = \lambda u$. Déterminer toutes les valeurs possibles de λ.
5. On suppose qu'il existe trois vecteurs u, v et w de E tels que $f(u) = 0$, $f(v) = v$ et $f(w) = -w$. Montrer que la famille (u, v, w) est nécessairement libre dans E.
6. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2 - id_E) \subset \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f^2 - id_E)$.
   (b) Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 - id_E)$.