AP n^{o} 9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2019

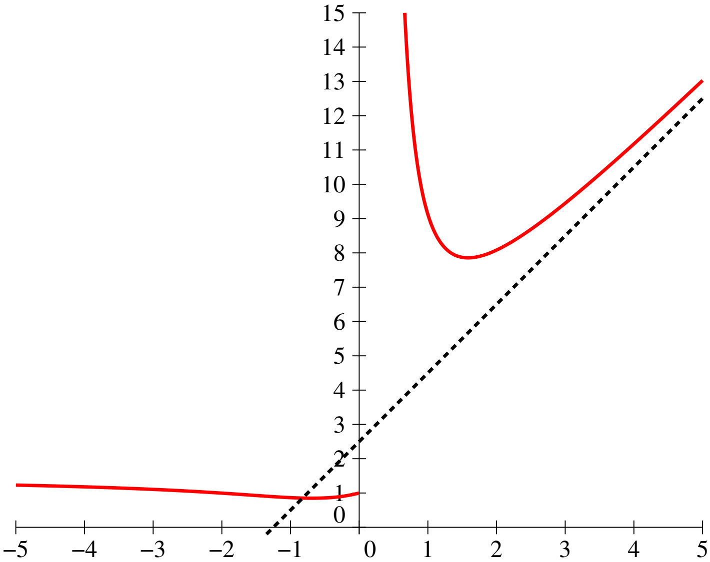
Calculs de DL

1. On commence par écrire $(\cos(x))^{\tan(x)} = e^{\tan(x)\ln(\cos(x))}$. Faisons le calcul progressivement : $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ (on applique le DL classique de $\ln(1+u)$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, qui a bien sûr une limite nulle, et comme $u \sim -\frac{x^2}{2}$, pas besoin d'aller au-delà jusqu'à l'ordre 2 puisqu'on aurait $u^2 \sim \frac{x^4}{4} = o(x^3)$). On multiplie ensuite par le DL bien connu de la fonction tangente pour trouver $\tan(x)\ln(\cos(x)) = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Il ne reste plus qu'à composer par l'exponentielle, ce qui ira encore une fois très vite puisqu'on ne gardera que le premier terme (non constant) du DL : $e^{\tan(x)\ln(\cos(x))} = e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.
2. Il faut ici simplement faire attention à calculer initialement des DL à l'ordre 4 car il va y avoir une simplification par x qui va diminuer le degré : $\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - u + u^2 - u^3 + o(x^3)\right)$, où on a posé $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$, qui tend vers 0 et qui vérifie $o(u^3) = o(x^3)$. On développe ensuite brutalement : $\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)\right) = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^3)\right) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$.
3. On commence par poser $X = \frac{1}{x}$ puis par écrire f sous une forme permettant d'effectuer des développements limités par rapport à la variable X (qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$). On calcule donc $f(x) = \frac{1}{X}e^{2X} + \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + 1} = \frac{1}{X}(e^{2X} + \sqrt{1 + X + X^2}) = \frac{1}{X}\left(1 + 2X + 2X^2 + o(X^2) + 1 + \frac{X + X^2}{2} - \frac{1}{8}(X + X^2)^2 + o(X^2)\right)$
$= \frac{1}{X}\left(1 + 2X + 2X^2 + 1 + \frac{X}{2} + \frac{3}{8}X^2 + o(X^2)\right) = \frac{2}{X} + \frac{5}{2} + \frac{19}{8}X + o(X)$. Il est temps de revenir à la variable initiale : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x + \frac{5}{2} + \frac{19}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit successivement :
   - $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - $f(x) - \left(2x + \frac{5}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{19}{8x}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x - \frac{5}{2} = 0$, ce qui prouve que la droite

d'équation $y = 2x + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

- De plus comme l'équivalent $\frac{19}{8x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Une allure de courbe tracée par ordinateur pour confirmer tout celà :



4. On a déjà vu en cours que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$. De plus, en posant $u = -x^2$ et en faisant le DL à l'odre 2 de $(1+u)^{\frac{1}{3}}$ (ce qui sera bien suffisant puisque $u^2 = x^4$), on trouve $\sqrt[3]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$. Il ne reste plus qu'à faire le produit de ces deux développements : $\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)} = \left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)$.

Une suite implicite

1. En posant $f_n(x) = x^3 + nx$, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions strictement croissantes, et bien sûr continue, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (les limites en $\pm\infty$ étant triviales). En particulier, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution.
2. Calculons donc $f_n(0) = 0$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} + 1 > 1$. On a donc $f_n(0) < f_n(u_n) = 1 < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui par croissance de la fonction f_n implique bien $0 < u_n < \frac{1}{n}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim u_n = 0$.
3. Comme $\lim u_n = 0$, on a $\lim u_n^3 = 0$. En reprenant l'équation définissant u_n, on peut donc en déduire que $\lim nu_n = \lim 1 - u_n^3 = 1$, ce qui prouve immédiatement que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
4. On repart encore une fois de l'équation $u_n^3 + nu_n = 1$, et on factorise classiquement par le terme prépondérant : $nu_n\left(1 + \frac{u_n^2}{n}\right) = 1$, soit $u_n = \frac{1}{n(1 + \frac{u_n^2}{n})}$. On sait déjà que $u_n \sim \frac{1}{n}$,

donc $u_n^2 \sim \dfrac{1}{n^2}$, et $\dfrac{u_n^2}{n} = \dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, donc $\dfrac{1}{1+\frac{u_n^2}{n}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})} = 1 - \dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ en appliquant le DL à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{1+u}$ à $u = \dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, qui a bien une limite nulle. On en déduit que $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

On peut reprendre le calcul avec ces informations supplémentaires : $u_n^2 = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n^5} + o\left(\dfrac{1}{n^5}\right)$ (il est inhabituel de modifier le o lors d'une élévation au carré, mais on a bien le droit ici, car lors de l'élévation au carré ce $o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ est au minimum multiplié par le facteur $\dfrac{1}{n}$), puis $\dfrac{u_n^2}{n} = \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{2}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$, donc $\dfrac{1}{1+\frac{u_n^2}{n}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^3}-\frac{2}{n^6}+o(\frac{1}{n^6})} = 1 - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{2}{n^6} + \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right) = 1 - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{3}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$, donc on déduit finalement $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{3}{n^7} + o\left(\dfrac{1}{n^7}\right)$. Les plus courageux continueront le calcul s'ils le souhaitent !

Des suites d'intégrales

1. En fait $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$ ne se calcule pas facilement du tout, sauf si on connait la réciproque Argsh de la fonction sh (ce qui n'est a priori pas votre cas) ! On peut retrouver ce résultat en effectuant dans l'intégrale le changement de variable $x = \mathrm{sh}(t)$: on a alors $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(t)} = \mathrm{ch}(t)$ (en utilisant la formule $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$). Or on aura dans ce cas $dx = \mathrm{ch}(t)\ dt$, numérateur et dénominateur se simplifient donc et on a bêtement $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \int_\alpha^\beta 1\ dt$. Il reste à calculer les nouvelles bornes de l'intégrale après changement de variable : lorsque $x = 0$, $t = 0$ puisque $\mathrm{sh}(0) = 0$, donc $\alpha = 0$. Lorsque $x = 1$, t est solution de l'équation $\mathrm{sh}(t) = 1$, soit $e^t - e^{-t} = 2$. Quitte à tout multiplier par e^t, on a donc $e^{2t} - 2e^t - 1 = 0$, ce qui est une équation du second degré déguisée. On pose $X = e^t$ pour obtenir $X^2 - 2X - 1$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et qui admet pour racines $X_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $X_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} > 0$. On ne garde que la solution positive X_2, qui conduit à $\beta = \ln(1+\sqrt{2})$. Finalement, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 1\ dt = \ln(1+\sqrt{2})$. Les plus courageux vérifieront que la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (et la réciproque de la fonction sh), résultat qu'on retrouve d'ailleurs pas le changement de variable effectué plus haut (mais appliqué à une intégrale sans bornes).

   Beaucoup moins de problèmes pour le calcul suivant : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

   Pour le calcul de $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$, il est malin de poser $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour obtenir $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, et donc $v(x) = x^2$ qui donne $v'(x) = 2x$. On trouve alors $I_3 = [x^2\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\ dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

2. Calculons donc $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$. Le numérateur du quotient sou l'intégrale étant toujours négatif sur $[0,1]$, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, donc la suite est décroissante. De plus, on a toujours $I_n \geqslant 0$ (on intègre une fonction positive), et par ailleurs, $\forall x \in [0,1]$,

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$, donc $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\ dx = \dfrac{1}{n+1}$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim I_n = 0$.

3. C'est immédiat : $I_n + I_{n-2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\ dx = J_n$.
4. Partons de I_n et effectuons le même type d'IPP que pour le calcul de I_3 : on pose $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, ce qui mène à $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, et $v(x) = x^{n-1}$ qui donne $v'(x) = (n-1)x^{n-2}$. On peut alors écrire $I_n = [x^{n-1}\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 (n-1)x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\ dx = \sqrt{2} - (n-1)J_n$. En remplaçant J_n par $I_n + I_{n-2}$ (résultat de la question précédente) et en passant tout à gauche, on se rend compte qu'il y avait une erreur d'énoncé et que la relation est en fait $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
5. La suite (I_n) étant décroissante, on peut certainement écrire que $I_{n-2} \geqslant I_n$, donc $nI_{n-2} \geqslant nI_n$ et $(2n-1)I_{n-2} \geqslant nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$. Quitte à décaler la valeur de n, $(2(n+2)-1)I_n \geqslant \sqrt{2}$, soit $(2n+3)I_n \geqslant \sqrt{2}$. De même, $\sqrt{2} = nI_n + (n-1)I_{n_2} \geqslant (2n-1)I_n$. On peut en déduire par exemple l'encadrement $\sqrt{2} - 3I_n \leqslant 2nI_n \leqslant \sqrt{2} + I_n$. Comme on sait que $\lim I_n = 0$, le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim 2nI_n = \sqrt{2}$, c'est-à-dire que $I_n \sim \dfrac{\sqrt{2}}{2n}$.