AP n° 9

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2019

Calculs de DL

1. Calculer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos(x)^{\tan(x)}$.
2. Calculer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.
3. Calculer un développements asymptotique à trois termes en $+\infty$ de $x \mapsto xe^{\frac{2}{x}} + \sqrt{x^2 + x + 1}$. En déduire l'existence d'une éventuelle asymptote oblique et la position relative de la courbe par rapport à celle-ci.
4. Calculer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{1 - x^2}}{\cos(x)}$.

Une suite implicite

1. Montrer que l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 1$.
2. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, et en déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer un équivalent simplement de u_n.
4. Déterminer les deux termes suivants du développement asymptotique de u_n.

Des suites d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1, puis I_3 à l'aide d'une IPP intelligente.
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n), ainsi que sa limite.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $I_n + I_{n-2} = J_n$.
4. À l'aide d'une IPP, montrer que, si $n \geqslant 3$, on a $nI_n + (n-1)I_{n-1} = \sqrt{2}$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$, ainsi qu'un équivalent simple de I_n.