

AP n° 10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

17 mai 2019

Exercice 1

1. La linéarité ne pose guère de problème : si P et Q sont deux polynômes (peu importe leur degré ici) et λ un réel, alors $f(\lambda P + Q) = \frac{X^2-1}{2}(\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)' + \lambda P + Q = \lambda \frac{X^2-1}{2}P'' + \frac{X^2-1}{2}Q'' - \lambda X P' - X Q' + \lambda P + Q = \lambda f(P) + f(Q)$, ce qui prouve la linéarité. De plus, si $d^\circ(P) \leq 2$, alors $d^\circ(P') \leq 1$ et $d^\circ(P'') \leq 0$, chacun des trois termes intervenant dans la définition de $f(P)$ est alors de degré inférieur ou égal à 2, et leur somme appartient donc à $\mathbb{R}_2[X]$, ce qui prouve que notre application linéaire est un endomorphisme de cet espace vectoriel.
2. On calcule les images par f des polynômes formant la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $f(1) = 0 - 0 + 1 = 1$; $f(X) = 0 - X + X = 0$; $f(X^2) = X^2 - 1 - 2X^2 + X^2 = -1$; et enfin $f(X^3) = 3(X^2 - 1)X - 3X^3 + X^3 = X^3 - 3X$. On en déduit la matrice demandée : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. L'image étant engendrée par les images des polynômes de la base canonique calculées plus haut, on a immédiatement $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X^3 - 3X)$ (inutile de garder l'image égale à -1 , qui est bien sûr opposée à celle égale à 1). En particulier, cette image est de dimension 2. Concernant le noyau, si on pose $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, en exploitant la linéarité de f , on aura $f(P) = af(1) + bf(X) + cf(X^2) + df(X^3) = a - c + dX^3 - 3dX$. Ce polynôme est nul si $a - c = d = -3d = 0$, soit $a = c$, $d = 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect}(X, 1 + X^2)$. Le noyau de f est donc lui aussi de dimension 2. Supposons maintenant qu'un polynôme P appartienne à la fois à $\ker(f)$ et à $\text{Im}(f)$, alors $P = aX + b(1 + X^2) = c + d(X^3 - X)$. Une identification sommaire donne alors les conditions $b = c$, $a = -d$, $b = 0$ et $0 = d$, qui impliquent manifestement que $a = b = c = d = 0$, c'est-à-dire que $P = 0$. Autrement dit, on a $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, et $\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, ce qui suffit à prouver la supplémentarité des deux sous-espaces dans E .
4. Il suffit par exemple d'élever au carré la matrice calculée à la deuxième question : $M^2 = M$, donc $f^2 = f$, ce qui prouve que f est un projecteur.

Exercice 2

1. La matrice dans la base canonique est simplement $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Pour calculer le déterminant de la matrice, on peut par exemple effectuer $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ (qui ne modifient pas le déterminant) pour obtenir $\det(M) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \end{vmatrix}$. On développe

alors par rapport à la dernière colonne (celle qui ne contient qu'un seul coefficient non nul) et on trouve $\det(M) = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = -2 \left(-1 + \frac{3}{2}\right) = -1$. La matrice M ayant un déterminant non nul, elle est inversible, ce qui prouve que f est bijective.

2. Pour déterminer le noyau de $f - id$, on résout le système
$$\begin{cases} -x & - & 2y & - & 2z & = & x \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & y \\ -2x & - & 2y & - & z & = & z \end{cases}$$

Les trois équations sont équivalentes à $x+y+z=0$, ce qui donne $\ker(f-id) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

En particulier, ce premier noyau est de dimension 2. De même, le noyau de $f+id$ se détermine

en résolvant
$$\begin{cases} -2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & & & = & 0 \end{cases}$$
. On a donc $z = -y$ (première équation) et

$x = -y$ (dernière équation) et la deuxième équation est alors automatiquement vérifiée, donc $\ker(f+id) = \text{Vect}((-1, 1, -1))$, en particulier ce deuxième noyau est de dimension 1. Les deux sous-espaces obtenus ont des dimensions dont la somme est égale à 3, et le vecteur $(-1, 1, -1)$ ne vérifie pas l'équation $x+y+z=0$, ce qui suffit à prouver que leur intersection est réduite au vecteur nul. Ces deux espaces sont donc bien supplémentaires.

3. On peut éviter les calculs compliqués en se contentant de constater que, en notant u, v et w les trois vecteurs obtenus à la question précédente, on a $f(u) = f(1, 0, -1) = (1, 0, -1) = u$; $f(v) = f(0, 1, -1) = (0, 1, -1) = v$, et $f(w) = f(-1, 1, -1) = (1, -1, 1) = -w$. En fait, même ces calculs ne sont pas nécessaires, on sait déjà par construction que u et v appartiennent à

$\ker(f-id)$, et que $w \in \ker(f+id)$. La matrice M' est donc $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sinon,

les plus courageux pourront aussi écrire la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, et

calculer le produit $P^{-1}MP$, ce qui suppose bien sûr de calculer l'inverse de la matrice P . On obtient bien entendu le même résultat à la fin.

4. La matrice M' vérifiant trivialement $M'^2 = I$, l'application f est une symétrie (par rapport à F parallèlement à G). On pouvait d'ailleurs le savoir une fois les calculs de la deuxième question effectués. La projection p dont on demande l'expression vérifie $f = 2p - id$, donc $p = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}id$. On a donc directement $p(x, y, z) = \frac{1}{2}(f(x, y, z) + (x, y, z)) = (-y - z, x + 2y + z, -x - y)$.

Exercice 3

1. Puisque le premier tirage s'effectue dans U_1 , $u_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ensuite il faut utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir rigoureusement les probabilités : les événements B_1 et $\overline{B_1}$ forment un système complet d'événements, et $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$ (on tire alors dans l'urne U_1), et $P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{1}{4}$ (on tire alors dans l'urne U_2). On applique donc la formule : $P(B_2) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P_{\overline{B_1}}(B_2) \times P(\overline{B_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. On effectue exactement le même raisonnement pour la troisième probabilité (les probabilités conditionnelles sont exactement les mêmes) : $P(B_3) = P_{B_2}(B_3) \times P(B_2) + P_{\overline{B_2}}(B_3) \times P(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{11}{32}$.
2. C'est à nouveau le même principe, avec les mêmes probabilités conditionnelles : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}(1 - u_n)$ (en utilisant bien entendu que $P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n) = 1 - u_n$), soit $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}$.

3. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, qui a pour solution $x = \frac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. On en déduit que $v_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{3 \times 2^{2n-1}}$, puis $u_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{2n-1}}\right)$. Cette suite a bien sûr pour limite $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui est plus ou moins logique (c'est entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, ce qui paraît vaguement cohérent puisqu'on va tirer alternativement dans les deux urnes).
4. La variable X_1 prend les valeurs 0 et 1, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune. Elle a donc une espérance égale à $\frac{1}{2}$. On a ensuite bien entendu $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Pour avoir $X_2 = 0$, on doit tirer deux boules noires aux deux premiers tirages, donc $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (on tirera dans ce cas dans l'urne U_2 pour le deuxième tirage). Au contraire, pour avoir $X_2 = 2$, il faut tirer deux boules blanches, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Il reste donc $P(X_2 = 1) = \frac{3}{8}$, ce qu'on peut vérifier directement : on tire une boule blanche puis une noire avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, et une noire puis une blanche avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, ce qui donne bien une somme égale à $\frac{3}{8}$. On calcule ensuite aisément $E(X_2) = \frac{3}{8} + \frac{2}{4} = \frac{7}{8}$. Enfin, on aura bien sûr $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. L'événement $X_3 = 3$ est réalisé si on tire successivement trois boules blanches, donc $P(X_3 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (on tirera toujours dans l'urne U_1). De même, il faut tirer trois boules noires pour avoir $X_3 = 0$, donc $P(X_3 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$. Les deux dernières probabilités ne se calculent pas facilement : par exemple $X_3 = 1$ est réalisé si on tire successivement une blanche puis deux noires, ou deux noires puis une blanche, ou une blanche entre deux noires, ce qui donne $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{11}{32}$. On en déduit par passage au complémentaire que $P(X_3 = 2) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. En particulier, on aura donc $E(X_3) = \frac{11}{32} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{39}{32}$.
5. En fait l'énoncé aiguille vers une très mauvaise méthode ! Le plus simple, de loin, est de noter Y_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement B_i (donc celle qui vaut 1 quand B_i est réalisé et 0 sinon). Par définition, $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ (puisque, en additionnant 1 à chaque fois qu'on tire une boule blanche et 0 sinon, on va bien obtenir le nombre de boules blanches tirées), donc, par linéarité de l'espérance, $E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(Y_i)$. Or, l'espérance d'une variable aléatoire indicatrice n'est autre que la probabilité de l'événement correspond, qu'on connaît ici très bien pour l'avoir calculée plus haut, donc $E(X_n) = \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2 \times 4^{i-1}}\right) = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4^i}$ (on a effectué un petit changement d'indice dans la deuxième partie de la somme, il ne reste plus qu'à appliquer le cours sur les sommes géométriques), soit $E(X_n) = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{n}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$. Lorsque $n = 3$, on retrouve $E(X_3) = 1 + \frac{2}{9} \times \frac{63}{64} = 1 + \frac{7}{32} = \frac{39}{32}$.