AP n° 10

PTSI B Lycée Eiffel

17 mai 2019

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on considère l'application f définie sur E par $f(P) = \dfrac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P$.

1. Montrer rigoureusement que f est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice représentative de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer une base du noyau et de l'image de f, et vérifier que ceux-ci sont supplémentaires dans E.
4. Montrer que f est un projecteur.

Exercice 2

On considère l'application définie dans $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (-x-2y-2z, 2x+3y+2z, -2x-2y-z)$.

1. Écrire la matrice représentative M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis calculer son déterminant. Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels $F = \ker(f - id)$ et $G = \ker(f + id)$. Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. En notant $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en regroupant les bases de F et de G obtenues à la question précédente, déterminer la matrice $M' = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
4. Reconnaitre l'application f, et en déduire l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles on effectue des tirages avec remise. L'urne U_1 contient deux boules blanches et deux boules noires, l'urne U_2 contient une boule blanche et trois boules noires. De plus les tirages s'effectuent de la façon suivante :

- le premier tirage s'effectue nécessairement dans U_1
- si on obtient une boule blanche au tirage n, on effectuera le tirage suivant dans U_1, sinon il se fera dans U_2.

On notera B_n l'événement « on tire une boule blanche au tirage n » et u_n sa probabilité.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
3. En déduire la valeur de u_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$. Ce résultat vous semble-t-il logique ?
4. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées lors des n premiers tirages. Déterminer la loi, l'espérance et la variance des variables X_1, X_2 et X_3.
5. (question difficile) Déterminer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$ puis en déduire la valeur de $E(X_n)$ (sans chercher à déterminer la loi complète de la variable).