

Chapitre 7 : Suites réelles

PTSI B Lycée Eiffel

8 décembre 2017

Toute la suite des hommes doit être considérée comme un même homme.

BLAISE PASCAL.

*Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».
Mais elles se font refouler à l'entrée parce qu'elles convergent !*

Introduction

Objectifs du chapitre :

- connaître précisément le vocabulaire sur les suites, et comprendre la signification des différentes définitions des limites
- savoir reconnaître immédiatement une suite classique, et en calculer le terme général sans se tromper
- maîtriser les techniques classiques de calcul de limite et d'étude de suite

1 Généralités sur les suites

1.1 Vocabulaire

Définition 1. Une **suite** d'éléments d'un ensemble E est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow E$ (dans toute la suite du chapitre, on aura $E = \mathbb{R}$, on parle alors de suite réelle ; on croquera exceptionnellement des suites complexes dans les exercices). On note habituellement u_n l'image par une telle application de l'entier n , aussi appelé **terme d'indice** n de la suite et on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire la suite elle-même. On parle également de suite de **terme général** u_n lorsqu'on donne l'expression de u_n en fonction de n .

On peut définir une suite réelle de bien des façons, les plus fréquentes étant les suivantes :

- par la liste de ses éléments, par exemple $u_0 = 2 ; u_1 = 4 ; u_2 = 6 ; u_3 = 8 ; u_4 = 10$ etc. C'est la méthode la plus naturelle, mais elle trouve très vite ses limites puisqu'il faut que la suite soit suffisamment simple pour qu'on devine tous les termes à partir des premiers.

- par une formule explicite pour le terme général, par exemple $u_n = n^2 - 4n + 1$. C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle qu'on cherchera à obtenir le plus souvent.
- un cas très fréquent est le cas de la définition par récurrence. Elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , et à préciser la valeur de u_0 (sinon, c'est comme pour une récurrence non initialisée, ça ne sert à rien). Par exemple, $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 5$. C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite. Il peut arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faut préciser les valeurs de u_0 et u_1 , voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare!).
- de façon implicite, par exemple u_n est l'unique réel positif vérifiant $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ (croyez-moi sur parole, il y en a un et un seul pour chaque valeur de n). Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs, mais on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite. Dans ce cas, on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions.

Remarque 1. L'ensemble des suites réelles est naturellement muni d'opérations de somme (on additionne les deux suites terme à terme), de produit et de produit par un réel. Très accessoirement, il s'agit d'un espace vectoriel réel.

Définition 2. Une suite réelle (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$; je vous fais grâce des définitions de croissance et décroissance stricte). Une suite réelle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

Exemple : Une technique classique pour étudier le sens de variation d'une suite est de calculer $u_{n+1} - u_n$ et de déterminer son signe. Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$, donc la suite est strictement croissante.

Définition 3. Une suite (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) par un réel m si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq m$ (resp. $u_n \geq m$). Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

1.2 Suites classiques

Définition 4. Une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ est une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 1. Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- variations : si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante; si $r < 0$, elle est strictement décroissante.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 + nr$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 + 0 \times r$, et en le supposant vrai au rang n , on a par définition $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- Cela découle de façon immédiate de la constatation que $u_{n+1} - u_n = r$.
- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_0 + kr = \sum_{k=0}^n u_0 + r \sum_{k=0}^n k = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre sur les ensembles.

□

Définition 5. Une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ est une suite vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 2. Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$.
- variations : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante (si $u_0 < 0$, c'est le contraire). Si $q < 0$, les termes de la suite sont de signe alterné.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 \times q^n$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 \times q^0$, et en le supposant vrai au rang n , on a par définition $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_0 \times q^{n+1}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 q^n (q - 1)$. Tous les résultats concernant le sens de variation en découlent.
- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=0}^{k=n} q^k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

□

Définition 6. Une suite réelle (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \notin \{0; 1\}$ et $b \neq 0$ tels qu'elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Théorème 1. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, alors, en notant α l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (aussì appelée **équation de point fixe** de la suite), la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a .

Démonstration. L'existence et l'unicité du réel α découlent du fait qu'on a imposé $a \neq 1$ dans la définition d'une suite arithmético-géométrique. Remarquons ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n - a\alpha = a(u_n - \alpha) = av_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a .

□

Remarque 2. On déduit du théorème précédent que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$, ce qui donne une expression explicite du terme de u_n . En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

- calcul du point fixe α .
- définition de la suite (v_n) .
- vérification que (v_n) est suite géométrique.
- conclusion : expression du terme général u_n .

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$. L'équation de point fixe de la suite est $x = 3x - 4$, qui a pour unique solution $x = 2$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3^{n+1}$, donc $u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2$.

Définition 7. Une suite réelle est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** si elle vérifie une relation de récurrence double linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels non nuls.

Proposition 3. Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** associée à la suite (u_n) l'équation $x^2 - ax - b = 0$. Soit Δ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta > 0$, alors $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$, où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique, et A et B deux constantes réelles.
- Si $\Delta = 0$, alors $u_n = (A + Bn)r^n$, où r est la racine double de l'équation caractéristique.
- Si $\Delta < 0$, alors $u_n = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))r^n$, où les deux racines complexes de l'équation caractéristique peuvent s'écrire $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.

Exemple : Un exemple classique de suite classique, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet comme racines $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. On peut donc écrire $F_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$. Les conditions initiales donnent $F_0 = A + B = 0$, donc $B = -A$, et $F_1 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1$, donc $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On a donc $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$.

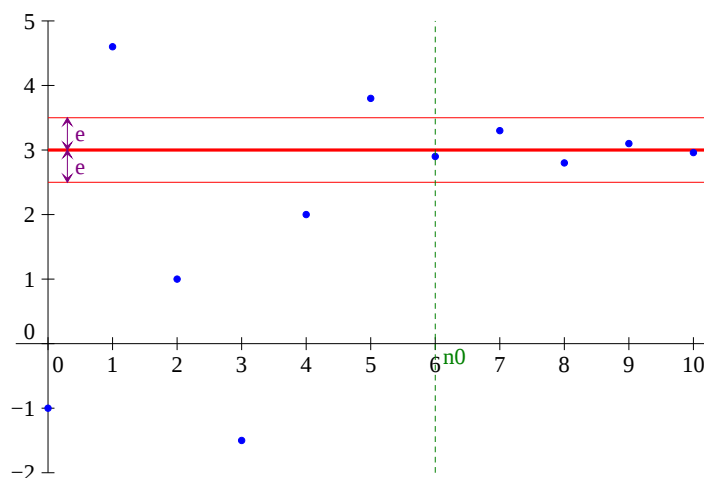
2 Convergence de suites

Une petite remarque préliminaire : dans la partie précédente, la plupart des résultats peuvent s'étendre à des suites qui ne sont pas à valeurs réelles (oui, mêmes les notions de suites arithmétique ou géométrique). Pour les résultats de convergence, nous allons nous restreindre au cas des suites réelles.

2.1 Limites finies

Définition 8. Une suite réelle (u_n) **converge** vers une **limite** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Toute suite convergeant vers une limite l est appelée suite **convergente**. Sinon, la suite est dite **divergente** (même si elle peut avoir une limite infinie).

Rappelons que $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie que $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Autrement dit, aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel l (c'est-à-dire aussi proche de 0 que soit ε dans notre définition), les valeurs de la suite vont finir par être **toutes** dans cet intervalle, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (jusqu'à n_0). Sur la figure ci-dessous, on a $l = 3$, et pour $\varepsilon = 0.5$ (noté e sur la figure), $n_0 = 6$.



Méthode : Pour prouver qu'une suite donnée converge vers un certain réel à l'aide de cette définition (ce qu'on fera heureusement assez rarement, mais il est important de bien comprendre les mécanismes cachés derrière le formalisme), on procède ainsi :

- On fixe ε à une valeur strictement positive quelconque.
- On calcule $|u_n - l|$.
- On cherche une valeur de n_0 (qui va naturellement dépendre de ε) à partir de laquelle cette expression est inférieure à ε .

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \frac{n+3}{n+2}$, et prouvons que sa limite vaut 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| = \left| \frac{n+3}{n+2} - 1 \right| = \left| \frac{n+3 - (n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{1}{n+2} \right| = \frac{1}{n+2}$. L'expression étant positive, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de n on a $\frac{1}{n+2} < \varepsilon$, ce qui nous donne $n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$. On peut donc choisir $n_0 = \text{Ent}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right) + 1$ (remarquez que, plus ε est proche de 0, plus n_0 devient grand, ce qui est logique).

Remarque 3. Le fait qu'une suite converge vers une limite l est équivalent à avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - l = 0$.

Proposition 4. Soit (u_n) une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Démonstration. Nous allons recourir à un raisonnement par l'absurde pour démontrer cette proposition. Supposons donc que le résultat énoncé est faux, c'est-à-dire qu'une même suite (u_n) admet deux limites distinctes l et l' (notons par exemple l' la plus grande des deux). Appliquons donc la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l' - l}{3}$: on peut donc trouver d'une part un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$; d'autre part un entier n_1 tel que $\forall n \geq n_1$, $u_n \in]l' - \varepsilon; l' + \varepsilon[$. Mais alors, dès que $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[\cap]l' - \varepsilon; l' + \varepsilon[$, ce qui est très gênant puisque cette intersection est vide d'après la définition de ε . Conclusion, l'hypothèse effectuée était absurde, et une suite ne peut pas avoir deux limites différentes. $\square$

Proposition 5. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Appliquons la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient un entier n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, $u_n \in]l - 1; l + 1[$. Par ailleurs, les termes de la suite d'indice inférieur à n_0 sont en nombre fini, il en existe donc un qui est le plus grand (notons sa valeur M) et un qui est le plus petit (on va le noter m). Il est alors facile de constater que la suite est minorée par $\min(m, l - 1)$ et majorée par $\max(M, l + 1)$. $\square$

Définition 9. Une **sous-suite** d'une suite (u_n) (aussi appelée **suite extraite**) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme (u_{2n}) (on ne garde que les termes d'indice pair de la suite), (u_{2n+1}) (on garde les termes d'indice impair), u_{3n} , etc.

Proposition 6. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers une limite l . Alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) converge vers cette même limite l .

Démonstration. C'est évident. Si on fixe un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un n_0 à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon$, et l'application φ étant strictement croissante, on aura a fortiori $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_0$. $\square$

Remarque 4. La réciproque de cette proposition est évidemment fausse. Un contre-exemple classique (qui est aussi un contre-exemple à la réciproque de la proposition sur le caractère borné des suites convergentes) est la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Pour cette suite, la suite extraite (u_{2n}) a pour limite 1 puisqu'elle est constante, la suite (u_{2n+1}) converge quant à elle vers -1 , et (u_n) n'est pas convergente.

Proposition 7. Si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) d'une suite (u_n) convergent vers une même limite l , alors (u_n) converge vers l .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier n_0 et un entier n_1 à partir desquels on aura respectivement $|u_{2n} - l| < \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$. Si $n \geq \max(2n_0, 2n_1 + 1)$, u_n est de la forme $2p$ (s'il est pair) ou $2p+1$ (s'il est impair) pour un entier $p \geq \max(n_0, n_1)$, donc on aura $\forall n \geq \max(2n_0, 2n_1 + 1)$, $|u_n - l| < \varepsilon$, ce qui prouve que (u_n) converge vers l . $\square$

Théorème 2. Bolzano-Weierstraß.

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Ce théorème est complètement HORS-PROGRAMME, interdiction absolue de l'utiliser en devoir. Nous en verrons tout de même une démonstration amusante un peu plus bas. $\square$

Théorème 3. Théorème de convergence monotone :

Toute suite décroissante et minorée converge. Toute suite croissante et majorée converge.

Démonstration. La preuve est un peu technique, on va la zapper. Contentons-nous de signaler que la limite d'une suite croissante monotone converge toujours vers la borne supérieure de ses termes, il faut donc une bonne caractérisation de la borne supérieure pour prouver le théorème. $\square$

Remarque 5. Attention ! Une suite croissante et majorée par un réel M ne converge pas nécessairement vers M . La suite a tout un paquet de majorants, dont un seul est sa limite.

Exemple : La suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ est croissante (car, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leq x^n$, donc $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}}$), et majorée par 1 (car $\forall x \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$, donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx = 1$), donc convergente. Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1. Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple (nous reverrons des exemples de ce genre dans le chapitre sur l'intégration).

Démonstration. du théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit donc (u_n) une suite bornée. Notons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n, u_n \geq u_p\}$. Deux possibilités : soit l'ensemble est fini, soit il est infini. Si A est infini, on considère la sous-suite contenant tous les termes de (u_n) dont l'indice appartient à A . Cette sous-suite est par construction décroissante puisque chacun de ses termes est plus grand que tous les termes suivants dans la suite (u_n) . Comme ladite sous-suite est par ailleurs minorée puisque (u_n) est bornée, elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Si A est fini, considérons un n_0 plus grand que le plus grand élément de A . Puisque $n_0 \notin A$, il existe certainement un entier $n_1 > n_0$ pour lequel $u_{n_0} < u_{n_1}$. De même, $n_1 \notin A$, donc on peut trouver un entier n_2 tel que $u_{n_1} < u_{n_2}$. On construit ainsi petit à petit une suite d'indices correspondant à une sous-suite croissante de (u_n) . Cette sous-suite étant majorée, elle converge. Remarquons qu'on a en fait démontré le résultat suivant : de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone. $\square$

2.2 Limites infinies

Définition 10. Une suite réelle (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, u_n > A$. On le note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. De même, une suite réelle (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, u_n < A$. On le note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = n^2$ et montrons à l'aide de cette définition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Comme pour le cas d'une limite finie, on commence pour cela par fixer la valeur de A . Constatons ensuite que $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (si $A \geq 0$; mais si $A < 0$, il n'y a pas vraiment de souci puisque dans ce cas u_n est toujours supérieur à A). On peut donc choisir $n_0 = \text{Ent}(\sqrt{A}) + 1$, et on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 8. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Cette dernière hypothèse signifie que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > A$. Mais la suite étant croissante, on a en fait $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > A$, ce qui prouve exactement la divergence vers $+\infty$. Inutile de refaire quoi que ce soit pour le deuxième cas : si (v_n) est décroissante non minorée, alors $(-v_n)$ est croissante non majorée, et on se ramène au cas précédent. $\square$

2.3 Opérations et limites

Proposition 9. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant (f.i. signifiant forme indéterminée) :

$(u_n) \backslash (v_n)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	f.i.
$-\infty$	$-\infty$	f.i.	$-\infty$

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où les deux suites ont une limite finie, notées respectivement l et l' . Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_n \in]l - \frac{\varepsilon}{2}; l + \frac{\varepsilon}{2}[$ (oui, la division par 2 est volontaire, après tout $\frac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif auquel on peut appliquer la définition de la limite); et un entier n_1 tel que $\forall n \geq n_1, v_n \in]l' - \frac{\varepsilon}{2}; l' + \frac{\varepsilon}{2}[$. En notant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient alors en ajoutant les deux encadrements $\forall n \geq N, u_n + v_n \in]l + l' - \varepsilon, l + l' + \varepsilon[$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = l + l'$. Les autres cas se démontrent de façon similaire et ne présentent pas de grosse difficulté. $\square$

Proposition 10. Soit (u_n) une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ (le signe dépendant du signe de la limite de (u_n) et de celui de λ suivant la règle des signes).

Démonstration. Prouvons le cas où la limite est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (c'est la même astuce que pour la démonstration de la limite d'une somme), donc pour $n \geq n_0$, $|\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Le cas des limites infinies est très similaire. $\square$

Proposition 11. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$(u_n) \backslash (v_n)$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	f.i.	f.i.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	f.i.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	f.i.	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Commençons par prouver le cas où les deux suites ont pour limite 0, et considérons $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels n_0 et n_1 tels que, respectivement, $\forall n \geq n_0, |u_n| < \sqrt{\varepsilon}$; et $\forall n \geq n_1, |v_n| < \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que $\forall n \geq \max(n_0, n_1), |u_n v_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Supposons désormais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - l') = 0$, donc en utilisant ce qu'on vient juste de démontrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l)(v_n - l') = 0$.

Or, $(u_n - l)(v_n - l') = u_n v_n - l v_n - l' u_n + ll'$, ou encore $u_n v_n = (u_n - l)(v_n - l') + l v_n + l' u_n - ll'$. D'après les propositions démontrées auparavant (limite d'une somme et d'un produit par un réel), on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0 + ll' + l'l - ll' = ll'$. $\square$

Définition 11. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ lorsque la suite (u_n) tend vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang. De même, on notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$ si (u_n) est négative à partir d'un certain rang.

Proposition 12. Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et ayant une limite, alors la limite de $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

(u_n)	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\left(\frac{1}{u_n}\right)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$. Soit $A > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| < \frac{1}{A}$. Quitte à changer la valeur de n_0 pour atteindre le rang à partir duquel (u_n) est positive et ne s'annule plus, on a même $0 < u_n < \frac{1}{A}$, d'où $\frac{1}{u_n} > A$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$. $\square$

Proposition 13. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

$(u_n) \backslash (v_n)$	$l' > 0$	$l' < 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$l < 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^+	0	0	<i>f.i.</i>	<i>f.i.</i>	0	0
0^-	0	0	<i>f.i.</i>	<i>f.i.</i>	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<i>f.i.</i>	<i>f.i.</i>
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>f.i.</i>	<i>f.i.</i>

Démonstration. Pas besoin de preuve, puisqu'un quotient n'est rien d'autre que le produit par un inverse. $\square$

Remarque 6. Tous les résultats classiques sur les limites de fonctions vus dans les premiers chapitres (limites de fonctions usuelles, croissances comparées) ne seront pas démontrés mais peuvent bien entendu être adaptés et utilisés dans le cadre des suites réelles.

Exemple : $u_n = \frac{\ln n + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}} = \frac{n^2}{e^n} \times \frac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}}$. En utilisant nos connaissances sur les croissances comparées, il est facile de constater que le premier quotient tend vers 0 et le deuxième vers 1, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2.4 Limites classiques

Proposition 14. Une suite arithmétique de raison r diverge vers $+\infty$ si $r > 0$, et diverge vers $-\infty$ si $r < 0$.

Démonstration. On peut revenir simplement à la définition (dans le cas où $r > 0$ par exemple) : si A est un réel quelconque, $u_n > A$ se produit dès que $u_0 + nr > A$, soit $n > \frac{A - u_0}{r}$ (pas de changement de sens de l'inégalité quand on divise par r), et on conclut sans difficulté. Dans le cas où $r < 0$, l'inégalité change de sens quand on divise par r et la conclusion est tout aussi facile. $\square$

Proposition 15. Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $v_0 \neq 0$. Si $q > 1$, la suite diverge vers $\pm\infty$ selon le signe de v_0 . Si $-1 < q < 1$ (ou si on préfère si $|q| < 1$), la suite converge vers 0. Si $q < -1$, la suite n'admet pas de limite, mais sa valeur absolue diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Commençons par le cas où $q > 1$, et notons $r = q - 1$, on peut alors écrire $v_n = v_0(1+r)^n$. Or, quel que soit l'entier naturel n et le réel positif r , on a $(1+r)^n \geq 1+nr$ (mais si, rappelez-vous, c'est un des exercices de votre feuille d'exercices sur les récurrences, pour la peine je ne refais pas la démonstration). La suite $(1+nr)$ étant une suite arithmétique de raison strictement positive, elle diverge vers $+\infty$, donc $(1+r)^n$ également (on utilise un peu les résultats de comparaison du paragraphe suivant pour conclure ceci). On conclut ensuite facilement en utilisant les limites du produit d'une suite par un réel.

En fait, on peut ramener le cas où $0 < q < 1$ au premier en considérant simplement l'inverse de la suite (v_n) , qui sera géométrique de raison $\frac{1}{q}$ et divergera donc vers $\pm\infty$. L'inverse d'une suite de limite infinie a bien une limite nulle. De même, si $q < -1$, il suffit de considérer $|v_n|$, qui est une suite géométrique de raison $|q| > 1$ et diverge donc vers $+\infty$; la suite (v_n) changeant tout le temps de signe si $q < 0$, elle ne peut avoir de limite. Par contre, si $-1 < q < 0$, en passant encore une fois à l'inverse, on déduira comme tout à l'heure que $|v_n|$ tend vers 0, ce qui est équivalent à dire que v_n tend vers 0. $\square$

2.5 Inégalités et limites

Proposition 16. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l' et telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $l \leq l'$.

Démonstration. Petit raisonnement par l'absurde : supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{3}$, alors à partir d'un certain rang on aura $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et $v_n \in]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$. Mais comme $l'+\varepsilon < l-\varepsilon$ (par construction de ε), ceci est incompatible avec le fait que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse est donc absurde et $l \leq l'$. $\square$

Remarque 7. Cette proposition est souvent utilisée sous la forme plus simple où l'une des deux suites est constante. Ainsi, si (u_n) converge et que $u_n \leq A$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq A$. Notamment, la limite d'une suite de signe constant est de même signe que la suite.

Remarque 8. L'inégalité sur la limite est toujours large, même si on a une inégalité stricte entre u_n et v_n . Par exemple, $\forall n \geq 1, 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n^2}$, mais ces deux suites ont la même limite.

Théorème 4. Théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement si vous voulez faire plus sérieux).

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (ces limites ont le droit d'être infinies).

Démonstration. Occupons-nous du cas où la limite commune de (u_n) et (v_n) est un réel l , et choisissons $\varepsilon > 0$. Alors à partir d'un certain rang, on aura $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|v_n - l| < \varepsilon$. Autrement dit, u_n et v_n appartiennent tous deux à l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Mais alors w_n , qui se situe entre les deux, appartient lui aussi à cet intervalle, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$. Le cas des limites infinies est tout aussi simple (une seule des deux suites encadrantes suffit même). $\square$

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile. Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurrence $\frac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir

$\frac{1}{(n+1)^2}$, donc $\frac{n}{(2n)^2} \leq u_n \leq \frac{n}{(n+1)^2}$ (il y a n termes dans la somme définissant u_n). Chacune des deux suites encadrant u_n ayant pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Définition 12. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si elles vérifient les deux propriétés suivantes :

- l'une est croissante et l'autre décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème 5. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Démonstration. Supposons par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissante, et commençons par constater que la suite $(u_n - v_n)$ est croissante et a pour limite 0. Cela implique que cette suite est à termes négatifs : en effet, si on avait, pour un rang n_0 , $u_{n_0} - v_{n_0} = \alpha > 0$, $(u_n - v_n)$ serait supérieure à $\alpha > 0$ à partir d'un certain rang, donc ne pourrait pas converger vers 0. Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Mais alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq v_0$. Autrement dit, (u_n) est croissante et majorée donc convergente. De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 , donc converge également. Si on note l et l' leurs limites respectives, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = l - l' = 0$, donc $l = l'$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Exemple : Considérons les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2}$, qui est négatif. La suite (v_n) est donc décroissante. Reste à vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$, ce qui n'a rien de difficile puisque $u_n - v_n = -\frac{1}{n}$.

Les deux suites sont donc adjacentes (pour les curieux, leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Proposition 17. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux suites définies par $a_n = \frac{Ent(10^n x)}{10^n}$, et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x . Le réel a_n est appelé **approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**, et le réel b_n **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**.

Démonstration. Par définition des parties entières, on a $Ent(10^n x) \leq 10^n x < Ent(10^n x) + 1$, donc $a_n \leq x < b_n$. En multipliant cet encadrement par 10, on obtient $10 Ent(10^n x) \leq 10^{n+1} x < 10 Ent(10^n x) + 1$. Le membre de gauche et celui de droite dans cet encadrement étant des nombres entiers, la caractérisation de la partie entière permet d'affirmer que $10 Ent(10^n x) \leq Ent(10^{n+1} x) \leq 10^{n+1} x < Ent(10^{n+1} x) + 1 \leq 10 Ent(10^n x) + 1$, soit en divisant le tout par 10^{n+1} , $a_n \leq a_{n+1} \leq x < b_{n+1} \leq b_n$. Autrement dit, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. De plus, $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$ a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite. Les encadrement donnés plus haut indiquent que cette limite commune est nécessairement inférieure ou égale à x (puisque la suite (a_n) est majorée par x), mais également supérieure ou égale à x (puisque (b_n) est minorée par x). Elle est donc nécessairement égale à x . $\square$

Remarque 9. Les nombres a_n et b_n correspondent effectivement aux valeurs usuelles utilisées pour les approximations décimales. Par exemple, si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3.141$ et $b_3 = 3.142$.

Proposition 18. Méthode de dichotomie.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$ (autrement dit, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ puis en procédant ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$; dans le cas contraire on pose $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$. De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par a_n ou b_n .

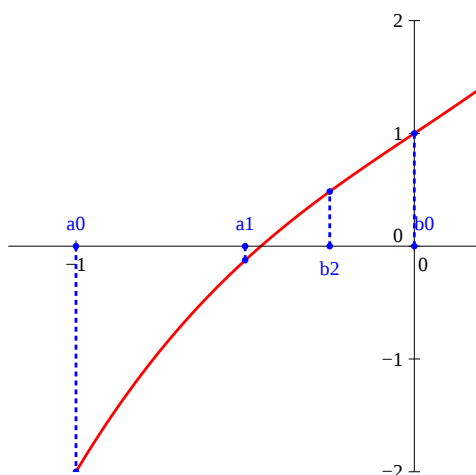
Démonstration. Cette propriété est une conséquence du théorème précédent. Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante par construction, reste à prouver que leur différence tend vers 0, ce qui découle de l'affirmation $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Prouvons cette affirmation par récurrence.

Au rang 0, on a $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$, donc la propriété est vraie. Supposons la vraie au rang n . On a alors, au choix, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$, ou $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$.

Dans les deux cas, en exploitant l'hypothèse de récurrence, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^n} \times \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Les deux suites sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite α .

Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$. Supposons par exemple $f(a) > 0$. Par construction, on aura toujours $f(a_n) \geq 0$ donc, la fonction étant continue, par passage à la limite, $f(\alpha) \geq 0$. De même, $f(b_n) \leq 0$, ce qui implique $f(\alpha) \leq 0$. On conclut que $f(\alpha) = 0$. $\square$

Exemple d'utilisation : On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4x^3 + 8x + 4 = 4g(x)$, avec $g(x) = x^3 + 2x + 1$. Cette fonction g est elle-même dérivable et $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. La fonction g est strictement croissante, elle s'annule en un unique réel α , et f est donc décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$.



On aimerait déterminer une valeur approchée de α . Ayons pour cela recours à la dichotomie, mais il faut commencer par trouver un premier encadrement de α . On constate que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, donc la racine de g se trouve dans l'intervalle $[-1; 0]$. On calcule ensuite $g(-0.5)$, qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0.5; 0]$. Puis on calcule $g(-0.25)$, qui est positif, donc $g(\alpha) \in [-0.5; -0.25]$. On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0.375$, à 0.125 près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.