

# Feuille d'exercices n°3 : Trigonométrie

PTSI B Lycée Eiffel

28 septembre 2017

## Vrai/Faux

On doit être capable de répondre correctement et sans hésiter à toutes ces questions, même un an après avoir suivi le cours correspondant.

1. La fonction tangente est périodique de période  $2\pi$ .
2. Une des formules de duplication peut s'écrire  $\sin(2x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$ .
3. Les réels vérifiant  $\sin(x) = \frac{1}{2}$  sont de la forme  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .
4. La fonction arccos est définie sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .
5. La fonction arctan a pour dérivée  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ .

## Exercice 1 (\*)

À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles  $\frac{\pi}{12}$  et  $\frac{\pi}{24}$ .

## Exercice 2 (\*\* à \*\*\*)

Résoudre les équations suivantes :

1.  $\tan(2x) = 1$
2.  $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
3.  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
4.  $\sin(3x) \cos^3(x) + \sin^3(x) \cos(3x) = \frac{3}{4}$
5.  $\arcsin(x) = \arccos(2x)$

## Exercice 3 (\*\*)

Calculer  $\sum_{k=1}^4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ .

## Exercice 4 (\*\*)

Exprimer, pour un réel  $x$  pour lequel cela a un sens,  $\tan(4x)$  en fonction de  $\tan(x)$ . En déduire que  $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$  (cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre  $\pi$  au début du 18ème siècle).

Montrer par le même type de méthode que  $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ .

## Exercice 5 (\*\*\*)

Étudier et tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$
- $g(x) = \arccos(\cos(3x))$
- $h(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$
- $i(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

## Exercice 6 (\*\*)

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que,  $\forall h \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin(h) \leq h \leq \tan(h)$ .
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses,  $h \cos(h) \leq \sin(h) \leq h$ , puis calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$ .
3. En déduire les limites quand  $h$  tend vers 0 de  $\frac{\sin^2(h)}{h}$ , puis de  $\frac{1 - \cos(h)}{h}$ .
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction  $\cos$ .
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction  $\sin$  est la fonction  $\cos$ .

## Exercice 7 (\*\*)

On pose dans tout cet exercice  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 \arctan(x)$ .

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction  $f$ , puis un ensemble d'étude intelligent pour  $f$ .
2. Calculer les valeurs  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $f(\sqrt{3})$ .
3. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , après avoir précisé les valeurs pour lesquelles cette dérivée existe.
4. Simplifier l'expression de  $f$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .
5. Montrer que,  $\forall x \geq 1$ ,  $f(x) = \pi - 4 \arctan(x)$ .
6. Donner la tableau de variations complet de  $f$ , puis tracer une allure de sa courbe représentative.

## Exercice 8 (\*\*)

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \arcsin(x) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2. Exprimer  $f$  plus simplement en vous aidant d'un calcul de dérivée.
3. Retrouver ce même résultat à partir de manipulation trigonométriques en faisant intervenir une variable  $\theta$  telle que  $x = \cos(\theta)$ .

### Exercice 9 (\*\*\*)

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ .

1. Préciser le domaine de définition de la fonction  $T_n$ .
2. Calculer  $T_n(1)$ ,  $T_n(0)$  et  $T_n(-1)$ .
3. Posons  $g(x) = T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$  pour tout  $x$  réel. Que vaut  $g(x)$  pour  $x \in [0, \pi]$ ? Quelle est la parité de  $g$ ? Sa périodicité? En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ .
4. Montrer que  $T_0(x)$ ,  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$  et  $T_3(x)$  sont des polynômes en  $x$ , que l'on précisera.
5. (a) Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $\cos((n+2)a) = 2\cos((n+1)a)\cos(a) - \cos(na)$ .  
 (b) En déduire que pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ .  
 (c) Retrouver ainsi l'expression de  $T_3(x)$ , puis calculer  $T_4(x)$  et  $T_5(x)$ .
6. Démontrer que les solutions de l'équation  $T_n(x) = 0$  sont les réels  $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ , avec  $k$  entre 0 et  $n-1$ .

### Exercice 10 (\*\*)

On rappelle que la fonction tangente hyperbolique est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$  (on pourra si on le souhaite réutiliser les résultats vus dans le problème de la feuille d'exercices n°2 concernant cette fonction). On pose désormais  $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x))$ .

1. Quel est le domaine de définition de la fonction  $f$ ?
2. Calculer  $f'(x)$  lorsque cela a un sens, en déduire une expression simplifiée de  $f$ .
3. Résoudre l'équation  $\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13}$ .
4. En déduire les solutions de l'équation  $\arctan(y) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

### Problème (\*\*\*)

#### I. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

Cette première partie présente deux méthodes de calcul de la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ . Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose  $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

1. (a) Exprimer, pour un réel  $x$  quelconque,  $\cos(4x)$  en fonction de  $\cos(x)$ .  
 (b) En déduire que  $\alpha$  est solution de l'équation  $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$ .  
 (c) En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-là.  
 (d) Déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .

2. (a) Démontrer la formule  $\cos(x) + \cos(3x) = \frac{\sin(4x)}{2\sin(x)}$  (quand cela a un sens).
- (b) En déduire la valeur de  $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ .
- (c) Calculer  $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$  (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
- (d) En déduire une équation du second degré vérifiée par  $\alpha$ , et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut  $S$  et le produit  $P$  sont solutions de l'équation  $x^2 - Sx + P = 0$ ).

## II. Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ !

Pour tous réels  $a$  et  $h$ , et pour tout entier  $n$ , on pose  $C_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh)$

et  $S_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh)$ . On note par ailleurs pour la suite de l'exercice  $\theta = \frac{\pi}{17}$ .

- Calculer ces deux sommes dans le cas où  $\sin \frac{h}{2} = 0$ .
- Dans le cas contraire, prouver que  $C_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$   
 et  $S_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$  (le plus rapide est de passer par les nombres complexes, mais on peut aussi s'en sortir par récurrence).
- On pose  $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$  et  $x_2 = \cos\theta + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$ . Montrer que  $x_1 > 0$ .
- Calculer la somme  $x_1 + x_2$  (assez facile).
- Calculer le produit  $x_1 x_2$  (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).
- En déduire les valeurs exactes de  $x_1$  et de  $x_2$ .
- On pose maintenant  $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$ ;  $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$ ;  $y_3 = \cos\theta + \cos(13\theta)$  et  $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$ . Calculer les produits  $y_1 y_2$  et  $y_3 y_4$ .
- En déduire les valeurs exactes de  $y_1, y_2, y_3$  et  $y_4$ .
- Calculer le produit  $\cos\theta \cos(13\theta)$  et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de  $\cos\theta$  (pour les plus masochistes courageux, finir les calculs et donner cette valeur).